EUCLIDES

vakblad voor de wiskundeleraar

maart 08

nr 5

jaargang 83

CE en SE vmbo

Wiskunde Scholen Prijs 2007

Instaptoetsen

Galileï en zijn GRM

Significante wiskunde



Orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

COLOFON

maart
08
nr 5
jaargang 83

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.
Het blad verschijnt 8 maal per verenigingsjaar.
ISSN 0165-0394

Redactie

Inzendingen bijdragen

Artikelen/mededelingen naar de hoofdredacteur: Marja Bos, Koematen 8, 7754 NV Wachtum
E-mail: redactie-euclides@nvvw.nl

Richtlijnen voor artikelen

Tekst liefst digitaal in Word aanleveren; op papier in drievoud. Illustraties, foto's en formules separaat op papier aanleveren: genummerd, scherp contrast.
Zie voor nadere aanwijzingen: www.nvvw.nl/euclricht.html

Realisatie

Ontwerp en vormgeving, fotografie, drukwerk en mailingservices
De Kleuver bedrijfscommunicatie b.v.
Veenendaal, www.de-kleuver.nl

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Website: www.nvvw.nl

Voorzitter

Marian Kollenveld,
Leeuwendaallaan 43, 2281 GK Rijswijk
Tel. (070) 390 63 78
E-mail: m.kollenveld@nvvw.nl

Secretaris

Wim Kuipers,
Waalstraat 8, 8052 AE Hattem
Tel. (038) 444 70 17
E-mail: w.kuipers@nvvw.nl

Ledenadministratie

Elly van Bemmel-Hendriks,
De Schalm 19, 8251 LB Dronten
Tel. (0321) 31 25 43
E-mail: ledenadministratie@nvvw.nl

Helpdesk rechtspositie

NVvW - Rechtspositie-Adviesbureau,
Postbus 405, 4100 AK Culemborg
Tel. (0345) 531 324

Lidmaatschap

Het lidmaatschap van de NVvW is inclusief Euclides.
De contributie per verenigingsjaar bedraagt voor
- leden: € 52,50
- leden, maar dan zonder Euclides: € 35,00
- studentleden: € 26,50
- gepensioneerden: € 35,00
- leden van de VVWL: € 35,00

Bijdrage WwF (jaarlijks): € 2,50
Betaling per acceptgiro. Nieuwe leden dienen zich op te geven bij de ledenadministratie.
Opzeggingen moeten plaatsvinden vóór 1 juli.

Abonnementen niet-leden

Abonnementen gelden steeds vanaf het eerstvolgende nummer.
Niet-leden: € 55,00
Instituten en scholen: € 140,00
Losse nummers zijn op aanvraag leverbaar: € 17,50
Betaling per acceptgiro.

Advertenties en bijsluiters

De Kleuver bedrijfscommunicatie bv:
t.a.v. Ada Valkenburg
Kerkewijk 63, 3901 EC Veenendaal
Tel. (0318) 555 075
E-mail: a.valkenburg@de-kleuver.nl

Kort vooraf

[Marja Bos]

Wijzigingen vmbo-examens

Hoewel een en ander in *Euclides* de nodige aandacht heeft gekregen, was het kennelijk nog niet bij alle betrokken docenten bekend dat er in de vmbo-examens wiskunde een paar veranderingen zijn doorgevoerd. Eén van de opvallendste wijzigingen is misschien wel het schrappen van het onderdeel *Statistiek en Informatieverwerking* uit het Centraal Examen. Dit zo belangrijke algemeen vormende onderwerp, wat mij betreft verplicht onderdeel van de 'maatschappelijke gereedschapskist' van iedere burger, moet overigens wél getoetst worden in het SchoolExamen. Naast deze verschuiving zijn er ook nog enkele andere aanpassingen geweest in de opzet van de vmbo-examens wiskunde. Truus Dekker zet in het openingsartikel van dit nummer van *Euclides* de zaken nog eens helder op de rij.

Nieuwe programma's havo/vwo

Een jaar geleden berichtte ik u vanaf deze plaats dat het niet onwaarschijnlijk leek dat de vernieuwingsoperatie '2010' een jaartje doorgeschoven zou worden. Inmiddels is duidelijk dat het er zelfs (minstens?) *drie* worden: op dit moment wordt 2013/2014 genoemd als jaar van invoering. Dat biedt in ieder geval een fatsoenlijke kans de volgend schooljaar te starten examenpilots ook behoorlijk te evalueren en de programma's zo nodig nog bij te stellen. Inmiddels zijn we alweer een eind gevorderd in het eerste cursusjaar van de '2007'-programma's. Hoe zijn uw ervaringen? Hoe gaat het bijvoorbeeld met NG-leerlingen die wél natuurkunde maar geen wiskunde B gekozen hebben? Is het een plezierige en haalbare keuzemogelijkheid, met name voor de leerling die van plan is een medische of paramedische studie te gaan volgen? Of pakt de combinatie van wiskunde A met natuur- en scheikunde toch wel érg ongelukkig uit? We horen graag van u!

Commissie Dijsselbloem

In haar eindrapport van 13 februari jl. (over de onderwijsvernieuwingen rond basisvorming, tweede fase en vmbo en over 'het nieuwe leren') richt de parlementaire onderzoekscommissie Dijsselbloem harde woorden aan het adres van de politiek: kerntaak ernstig verwaarloosd, tunnelvisie, grote risico's met kwetsbare leerlingen genomen… Het loog er allemaal niet om! Men constateert bovendien een dalende trend in het bereikte niveau van basisvaardigheden als lezen en rekenen/wiskunde. De commissie stelt verder dat de overheid niet over het pedagogisch-didactische 'hoe' maar over het onderwijsinhoudelijke 'wat' hoort te gaan, inclusief de kwaliteitsbewaking (leerstandaarden en verplichte toetsing). Het 'hoe', de weg ernaar toe, de aanpak, dat is een zaak die volgens de commissie niet bij de overheid maar bij de scholen thuis hoort. (Bij de leraren? De directies? Of bij de school-*besturen*?!) De commissie pleit voor *vrijheid van inrichting binnen heldere kaders*, met een sterkere rol voor de vakdocent.
Opvallend puntje uit het rapport: ook hier weer de aanbeveling om zowel schoolexamen als centraal examen afzonderlijk met voldoende resultaat te moeten afsluiten om te kunnen slagen.
De commissie adviseert de Tweede Kamer bovendien zich te bezinnen op de vraag of vakken als Nederlands en wiskunde in de toekomst niet moeten worden uitgesloten van (de mogelijkheid van) vakkenintegratie of geïntegreerde opname in bredere leergebieden.

Expertgroep Doorlopende Leerlijnen

Eind januari verscheen een ander langverwacht rapport: 'Over de drempels met taal en rekenen', van de Expertgroep Doorlopende Leerlijnen. Ook hier een pleidooi voor heldere kaders en voorgeschreven (tussen)niveaus, waarbij voorrang gegeven wordt aan basiskennis en (gedifferentieerde) basisvaardigheden. Vanaf pagina 277 vindt u een overzicht van de bevindingen en adviezen van de Expertgroep, toegespitst op het onderdeel rekenen. Het is de bedoeling om in een volgend nummer van *Euclides* nadere aandacht te schenken aan de aanbevelingen van de Expertgroep.

Back to basics?

De slinger van de geschiedenis gaat dus al met al weer in de richting van de basisvaardigheden. Daar lijkt me niks mis mee, maar laten we zorgen dat we de nuance niet uit het oog verliezen… Her en der wordt in de (al dan niet publieke) discussie flink met modder gegooid, en ik heb al weer heel wat pek en veren uitgedeeld gezien. Het lijkt me van groot belang, dat de problemen zo objectief mogelijk in kaart gebracht worden, en vervolgens onbevangen, met vrije geest, opgelost worden. Bij voorbaat vasthouden aan 'politiek correcte' standpunten, van welke zijde ook, kan het denken ernstig belemmeren…

Inhoud

Rectificatie Euclides 83-3, december 2007
- Pagina 109, links, regel 21 van boven
De daar vermelde formule moet luiden:
$F_n^2 = F_{n-1} \cdot F_{n+1} + (-1)^{n-1}$

Rectificatie Euclides 83-4, februari 2008
- Pagina 156, midden, regel 20 van boven
De breuk 3/4 moet zijn 4/3.

Centrale examens en schoolexamens wiskunde vmbo

[Truus Dekker]

Op het gebied van de examinering van wiskunde in het vmbo hebben in de afgelopen periode enkele ingrijpende wijzigingen plaatsgevonden, zoals het globaal formuleren van de examenprogramma's, invoering van een digitaal examen voor de basisberoepsgerichte leerweg, uitgave van nieuwe syllabi voor het centraal examen en meer vrijheid voor de scholen waar het de inrichting van het schoolexamen betreft. Verder is een januari-examen op enkele pilotscholen mogelijk en kan het digitale examen straks op meerdere momenten in het jaar worden afgenomen. Over enkele van die veranderingen en de gevolgen die dat heeft voor docenten en leerlingen gaat dit artikel.

Centrale examens

Wiskunde is een verplicht sectorvak in de sectoren techniek en landbouw, en een keuze-sectorvak in de sectoren zorg&welzijn en economie. Vandaar wellicht, bij het aanpassen van de examenprogramma's in 2007, de keuze van Cevo [1] voor de exameneenheid *meetkunde* als vast onderdeel van het centraal examen en het verschuiven van *informatieverwerking en statistiek* naar het schoolexamen.

Zonder er diep op in te gaan probeer ik de belangrijkste gevolgen van de wijzigingen van de afgelopen jaren, voor zover ze de centrale examens betreffen, hieronder samen te vatten. Eerder verscheen hierover al een artikel in Euclides (2007). [2]

1. Het examenprogramma omvat alleen nog globale eindtermen. Deze globale eindtermen gelden zowel voor het centraal examen als voor het schoolexamen.
2. Het gedeelte van het examenprogramma dat in het centraal examen getoetst wordt is toegelicht in de syllabus. Syllabi [3] kunnen bij wijze van spreken elk jaar worden aangepast. Voor u als docent betekent het dat u bijvoorbeeld voorstellen tot wijziging kunt sturen naar de NVvW. De vereniging kan dan namens een groep leden een verzoek tot wijziging indienen bij de Cevo. Ook als u fouten of omissies in het examenprogramma of de syllabus vindt, kunt u dit aan de NVvW doorgeven.
3. De syllabi gelden vanaf de examens 2008. Alle vmbo-scholen hebben een exemplaar toegestuurd gekregen voor de vakken waarin hun leerlingen examen doen. Informeer dus bij de schoolleiding als u deze syllabi (nog) niet hebt gezien. U kunt ze ook downloaden van www.examenblad.nl. Voor de schoolexamens heeft de SLO de Handreiking schoolexamens wiskunde vmbo samengesteld [4].
4. Het centraal examen wiskunde voor de basisberoepsgerichte leerweg is een digitaal examen geworden. De vragen zijn via het beeldscherm zichtbaar, de antwoorden (ook op open vragen en tekeningen) worden via toetsenbord en muis ingevoerd. Er komt geen papier meer aan te pas, behalve natuurlijk een kladblaadje. Naar verwachting zullen in 2009 voor het vak wiskunde in de basisberoepsgerichte leerweg geen papieren examens meer beschikbaar zijn.
5. De eerste digitale pilot KB-examens zullen waarschijnlijk in 2010 worden afgenomen.
6. Tijdens alle centrale examens mag een woordenboek Nederlands gebruikt worden.

Schoolexamens

Behalve het feit dat het onderwerp *Informatieverwerking en statistiek* verplicht moet worden getoetst in het schoolexamen, hoeft er dus niet zoveel te veranderen in de schoolexamens, zou je zo zeggen. Je gebruikt oude examenopgaven voor de schoolexamens waarin de onderdelen algebra, meetkunde en rekenen voorkomen en voor informatieverwerking kijk je naar de nog oudere examens; klaar is kees. Digitale oefenexamens zijn er ook om de leerlingen op de BB-examens voor te bereiden. Tja, zo zou het kunnen, maar ik heb het gevoel dat de leerlingen dan toch wel tekort gedaan wordt. De scholen hebben meer vrijheid gekregen bij het invullen van de schoolexamens en het zou jammer zijn om die mogelijkheden niet te benutten. Als er op uw school een andere invulling aan het schoolexamen wordt gegeven, laat het dan vooral aan de *Euclides*-lezers weten, we willen graag van elkaars ervaringen leren.

Laten we eens wat mogelijkheden bekijken.

Aansluiten bij de beroepsopleiding

Leerlingen uit de leerwegen BB en KB volgen naast wiskunde ook een beroepsopleiding. Ga eens kijken tijdens de praktijklessen en overleg met de betreffende docent(en) of wiskunde deel kan uitmaken van de praktijk-schoolexamens. Bijvoorbeeld door naast het beroepsdeel ook een serie wiskundeopgaven te





laten maken die betrekking hebben op de beroepspraktijk. Dat kan bijvoorbeeld een serie rekenopgaven zijn voor leerlingen uit de sector Zorg&Welzijn, of het lezen en interpreteren van bouwtekeningen voor leerlingen uit de sector Techniek. Probeer zo dicht mogelijk bij de beroepspraktijk te blijven.

Voorbeeldopgave rekenen voor verpleegkundigen (zie [5]; pag. 76.)
Een patiënt moet 2,7 liter infuus per 24 uur krijgen. Je kunt een infuuspomp gebruiken waarbij je de stand kunt instellen op een aantal milliliter per uur (ml/uur).
Op welke stand zet je de infuuspomp?
Antwoord: … ml/uur

De leerlingen krijgen behalve een cijfer voor het beroepsdeel ook een cijfer voor het wiskunde/rekenen-deel. Het is natuurlijk ook mogelijk om op deze manier een aantal vragen die aansluiten bij de beroepspraktijk, op te nemen in het gewone wiskunde-schoolexamen. Juist omdat ook voor het schoolexamen de globale eindtermen gelden, hoeft het schoolexamen geen kopie te zijn van het centrale examen maar kan het veel meer aan de schoolpraktijk worden aangepast.

Mondeling toetsen
Niet elke toets hoeft een schriftelijke toets te zijn die binnen een bepaalde tijd klaar moet zijn. U kunt overwegen een deel van de stof mondeling te (laten) toetsen, tijdens het uitvoeren van een praktijkopdracht bijvoorbeeld. Voor sommige leerlingen kan de afname van een mondelinge toets minder 'bedreigend' zijn omdat u een extra aanwijzing kunt geven of een nadere toelichting bij een onbekend begrip of woord.

Omgaan met ICT
In veel beroepen wordt met spreadsheets gewerkt, zoals Excel. Van vmbo-leerlingen kan waarschijnlijk niet verwacht worden dat ze zelfstandig bijvoorbeeld een begroting voor metselwerk of een onderhoudsschema kunnen maken. Het kunnen lezen en interpreteren of eventueel aanpassen van zo'n schema behoort waarschijnlijk wel tot de mogelijkheden. Hoe worden bepaalde bedragen in een schema berekend? Welke formule zit daaronder? Hoe verander je een bestelbon wanneer de prijs per artikel wordt gewijzigd? Begrijpen wat je wilt (laten) berekenen en waarom, is in dit geval belangrijker dan het zelf kunnen uitvoeren van die berekening.

Een statistisch onderzoek laten uitvoeren
Omdat de exameneenheid *Informatieverwerking en Statistiek* geen deel (meer) uitmaakt van het centrale examen, zijn hier de mogelijkheden van een eigen invulling nog groter. Laat leerlingen in de loop van het schooljaar bijvoorbeeld een statistisch onderzoek uitvoeren dat van belang is voor de eigen school. Het is vaak moeilijk voor leerlingen om een grote opdracht goed te overzien. Maak dan deelopdrachten en geef daar apart cijfers voor, zoals het maken van goede vragen, het kiezen van een 'eerlijke' steekproef, het kiezen van een goede manier om resultaten weer te geven, enzovoort.
Het is ook heel goed mogelijk om bij de deelopdrachten een aantal gesloten vragen over de achterliggende theorie te stellen. Kijk bijvoorbeeld eens naar de volgende opgave uit het PISA-2003-onderzoek [6]:

Voor een werkstuk over het milieu verzamelden leerlingen gegevens over de afbraaktijd van verschillende soorten weggegooid afval:

Soort afval	*Afbraaktijd*
Bananenschil	1-3 jaar
Sinaasappelschil	1-3 jaar
Kartonnen dozen	0,5 jaar
Kauwgum	20-25 jaar
Kranten	Een paar dagen
Plastic bekertjes	Meer dan 100 jaar

Een leerling wil de resultaten weergeven in een staafdiagram. Geef één argument waarom een staafdiagram niet geschikt is om deze gegevens weer te geven.

Leerlingen moeten niet alleen kunnen reproduceren wat ze geleerd hebben, maar



ook wiskundige argumenten geven om de juistheid of onjuistheid van een redenering aan te geven. Dat moeten ze al tijdens hun schoolperiode leren en we moeten er ook in toetsen en schoolexamens naar vragen want zoiets leer je niet 'vanzelf'.

Rekenvaardigheden
En hoe zit het nou met de rekenvaardigheden? Die vormen ook een subdomein van het examenprogramma. Moeten er soms 'kale' rekenopgaven in de schoolexamens komen omdat er overal geklaagd wordt over de geringe rekenvaardigheden van de vmbo-ers? Het antwoord op die vraag is simpel. Niemand houdt u tegen wanneer u 'kale' rekenopgaven in de schoolexamens wilt stoppen, omdat u daar ook in de lessen veel aandacht aan besteed hebt. Een (school)examen moet immers aansluiten bij het onderwijs dat eraan voorafgaand werd gegeven. In de laatste jaren van het vmbo ligt de nadruk over het algemeen echter niet (meer) op het *leren* rekenen maar op het *gebruiken* van de rekenvaardigheden in allerlei beroepssituaties en in de maatschappij. Daar hoort nadrukkelijk het op een verstandige manier kunnen inzetten van de rekenmachine bij. In het pas verschenen rapport van de Expertgroep Doorlopende Leerlijnen Taal en Rekenen [7] wordt dat als volgt verwoord:
'Het zal duidelijk zijn dat de aandacht

voor het *functioneel gebruiken* centraal staat in het vmbo, zonder dat met name in de theoretische en gemengde leerweg de formalisering helemaal wordt vermeden. Dat spoor wordt vervolgd in het mbo waarbij de koppeling gelegd wordt met de beroepssituaties waarin wiskunde en rekenen worden gebruikt.'

Bij functioneel gebruiken moet natuurlijk ook gedacht worden aan het analyseren en begrijpen van allerlei informatie uit kranten en tijdschriften. In een krantenartikel (NRC, 23 juli 2007) stond bijvoorbeeld de volgende uitspraak [8]:

> 'Het aantal dikke kinderen is in Nederland verdubbeld tussen 1980 en 1997. Van 1 op de 14 naar 1 op de 7.
> Inmiddels is zelfs al 1 op de 5 kinderen te dik!'

Vragen die je daarbij kunt stellen zijn bijvoorbeeld:
- Kendra denkt dat er in het artikel een fout gemaakt is; 7 is immers de helft van 14 en niet het dubbele! Leg uit welke fout Kendra maakt.
- Hoeveel procent van de kinderen in Nederland is op dit moment te dik?
- Wat moet je nog meer weten om te kunnen zeggen hoevéél kinderen nu te dik zijn?

En wat moet je nu opschrijven als antwoord? Geen lang verhaal opschrijven maar wel uitleggen hoe je geredeneerd hebt. Daarom blijft het bespreken van antwoorden en strategieën in de klas belangrijk.

Met name het vertalen van het probleem, zoals verwoord binnen een situatie, naar het formuleren van de berekening die nodig is om het probleem op te lossen, blijkt lastig te zijn voor vmbo-ers. Docenten mopperen soms dat contextproblemen een goede leesvaardigheid vragen van hun leerlingen, en dat is natuurlijk ook zo. Maar in de beroepspraktijk zullen niet vaak 'kale' rekenopgaven gevraagd worden en zullen de beroepsbeoefenaars meestal zelf nog moeten bedenken wat er precies berekend moet worden. Daar kun je maar beter in vmbo en mbo mee beginnen!

Samenvatting en conclusies

Sinds 2007 zijn er een aantal wijzigingen in de examens ingevoerd, zowel wat betreft de organisatie, het afnametijdstip, de vorm van het examen als het examenprogramma. In de examenprogramma's zijn alleen globale exameneisen opgenomen. De syllabi bevatten gedetailleerde informatie over het centraal examen en deze kunnen gemakkelijker dan voorheen worden gewijzigd. Scholen en docenten hebben meer vrijheid gekregen bij het inrichten van de schoolexamens. Er worden voorbeelden genoemd van de manier waarop die vrijheid kan worden gebruikt om de schoolexamens beter te laten aansluiten bij wat er in de betreffende school gedaan wordt en ook bij de sectorspecifieke beroepsgerichte vakken.

Noten

[1] Cevo: Centrale Examencommissie Vaststelling Opgaven (vwo, havo en vmbo); website: *www.cevo.nl*.

[2] Pieter van der Zwaart (SLO). In: *Euclides* 82(4).

[3] Wiskunde en natuurwetenschappen. Syllabi centraal examen 2008 en 2009. Uitgave Cevo, mei 2007.

[4] Stichting LeerplanOntwikkeling; meer informatie en bestellen via de website van SLO (*www.slo.nl*).

[5] C.W. de Jong, A.P. Koster (2007): *Rekenvaardigheid van verpleegkundigen*. Maastricht: Faculteit der Gezondheidswetenschappen, Universiteit Maastricht. Digitaal beschikbaar via: *www.venvn.nl/uploaded/FILES/Hoe_ga_je_om/Rekenvaardigheid-vanverpleegkundigen.pdf*.

[6] PISA: Programme for International Student Assessment; zie: *www.oecd.org/pisa*.

[7] Titel 'Over de drempels met taal en rekenen', uitgave 2008. Zie ook pag. 281 e.v. in dit nummer.

[8] Uit de verzameling vmbo rekenopgaven (*www.slo.nl*).

Over de auteur
Truus Dekker is werkzaam bij het Freudenthal Instituut maar heeft ook een jarenlange leservaring, van zwakke vmbo-leerlingen tot en met examenklassen vwo. Daarnaast is ze werkzaam bij Cevo, voor de vmbo-examens wiskunde.
E-mailadres: *T.Dekker@fi.uu.nl*

Verschenen /

Twee plus twee is vijf



Ondertitel: Citaten, weetjes, fascinerende berekeningen en raadsels over cijfers en getallen
Auteur: Luc Gheysens
Uitgever: Die Keure NV, Brugge (België)
ISBN 978 90 8661 649 7
Prijs € 14,00 (103 pagina's)

Uit het voorwoord – Uit ons dagelijks leven zijn getallen niet meer weg te denken: nummers van bankrekeningen, telefoonnummers, huisnummers, (…), lottogetallen, beurscijfers… Overal zijn cijfers en getallen aanwezig.
In het eerste deel van dit boekje gaan we op zoek naar de oorsprong van onze cijfers, die men terecht Arabische cijfers noemt. Alhoewel niemand met zekerheid kan zeggen hoe de cijfertekens zijn ontstaan, bestaan hierover toch enkele aanneembare theorieën. We hebben het ook heel even over de oorsprong van het woord 'wiskunde'.
Cijfers en getallen duiken in verschillende landen en culturen op in spreuken. Wie kent niet de betekenis van 'Beter één vogel in de hand, dan tien in de lucht' en 'Als twee honden vechten om een been, loopt de derde ermee heen'? Het tweede deel bevat 500 citaten, spreuken en oneliners waarin getallen voorkomen.
Het derde deel is een collectie van merkwaardige berekeningen waarin alle cijfers worden gebruikt (…)
De lezer die graag puzzels en spelletjes met getallen oplost zal aan zijn trekken komen in het vierde deel (…)
Ten slotte voegen we aan dit werkje nog een opdracht toe. Deze zoekopdracht is een uitnodiging om op het internet naar informatie te speuren over hoe de Maya's, de Babyloniërs en Sumeriërs, de Egyptenaren en de Grieken rekenden (…)

Voor een korte bespreking van het boekje zie:
www.wiskundemeisjes.nl/20071213/twee-plus-twee-is-vijf/

Verschenen /

Gegoochel met getallen



Ondertitel: Reken- en wiskundige goocheltrucs
Auteur: Job van de Groep
Uitgever: Blikwisseling / Job van de Groep, Vianen (2007)
ISBN 978-90-812648-1-5 (64 pagina's)
Prijs: € 6,95 + € 2,00 verzendkosten, te bestellen via blikwisseling@planet.nl of bij de auteur, jobini@planet.nl, 0347-373086.

Voor zijn workshop *Gegoochel met getallen* (Nationale Wiskunde Dagen 1999) was door wiskundedocent en amateurgoochelaar Job van de Groep een hand-out samengesteld die als basis heeft gediend voor deze publicatie.
Dit boekje is een tweede herziene druk van het boekje dat in 2006 is uitgebracht door EPN. Een aantal van de beschreven trucs verscheen eerder in de rubriek 'De wiskundedocent als goochelaar' in de jaargangen 80 en 81 van Euclides.

Uit het voorwoord:
"Er zijn genoeg momenten waarop je als leraar even iets anders, iets bijzonders wilt doen. (…) De trucs en handigheidjes in dit boekje zijn gebaseerd op reken- en wiskundig getinte principes. Ze zijn vaak oud en bekend in diverse gedaantes. Ze lenen zich goed om te worden vertoond zonder al te ingewikkelde voorbereidingen, beslist óók in de huiselijk kring! (…)
Speciaal in een reken- of wiskundeles biedt het de mogelijkheid een ludieke aanvulling te geven op de behandeling van bepaalde onderwerpen. Suggesties daartoe zijn telkens bij het onderdeel 'Transfer naar de les' opgenomen."

Instaptoetsen wiskunde in een internationaal perspectief

[Dirk Tempelaar en Wim Caspers]

Inleiding
Eind november is de eerste cyclus van het project Nationale Kennisbank Basisvaardigheden Wiskunde (NKBW; zie [1]) afgerond. NKBW is één van de Nationaal Actieplan E-learning initiatieven, uitgevoerd door een groot aantal instellingen uit hoger onderwijs (HO) en voortgezet onderwijs (VO), die zich richten op aansluitingsproblematiek bij de overgang van VO naar HO, of van beroepsonderwijs naar HO. In het kader van NKBW is een heel scala van activiteiten uitgevoerd (zie eindverslag [2]): maken en verzamelen van wiskundige leermaterialen, bouwen van de internet-portal *Wizmo.nl* om die materialen te ontsluiten, geven van bijspijkercursussen wiskunde, samenstellen en afnemen van diagnostische toetsen en het in de steigers zetten van een aansluitmonitor wiskunde. Die monitor beoogt op systematische manier inzicht te geven in de kennisbeheersing wiskunde van VO-leerlingen bij hun overgang naar het HO, en de mogelijke aansluitproblemen die daaruit voortkomen (zie [1], p. 70). Instaptoetsen vormen een belangrijke gegevensbron voor de samenstelling van die monitor. In deze bijdrage zal nader worden ingegaan op die instaptoetsing en de duidelijke conclusies die uit de eerste afnamen naar voren komen: de tekortschietende beheersing van algebraïsche basisvaardigheden. Elders (zie [3], [4]) is het aspect van bijspijkeren verder uitgediept.

Toetsing
De gewoonte om leerlingen bij de overgang van VO naar HO te toetsen op wiskundige vaardigheden is niet nieuw; ook al voor het NKBW-project vond die toetsing plaats. Deze instaptoetsen wiskunde worden primair afgenomen bij instellingen van HO waar leerlingen hun vervolgopleiding beginnen, maar tegelijkertijd is er een begin gemaakt met toetsing binnen het VO: zie de initiatieven tot exittoetsing van de NVvW. In het kader van het NKBW-project (en de sterk daaraan gerelateerde werkzaamheden van SIGMA, of Special Interest Group Mathematics Activities, de brede belangengroep van VO en HO die zich richt op het versterken van wiskundekennis; zie [5]) zijn initiatieven ondernomen om die toetsing te standaardiseren. Op die wijze is het mogelijk toetsuitkomsten, naast een signalerende functie naar leerling en instelling, een derde functie te geven: die van maatstaf voor landelijke ontwikkelingen. In de hierboven genoemde monitor wordt vooral beoogd een beeld te krijgen van de ontwikkeling van wiskundebeheersing in de tijd. In deze bijdrage staat een andere vergelijking centraal: die van de wiskundebeheersing van leerlingen met een Nederlandse vwo-opleiding met die van leerlingen met andersoortige vooropleidingen.
Daartoe is gebruik gemaakt van een instaptoets die eerder is ontwikkeld door de drie technische universiteiten (TU), de 3TU2005-instaptoets die eerder in *Euclides* is besproken (zie [6]). Deze instaptoets is in het kader van het NKBW-project voorgelegd aan instromers van één van de meest internationaal georiënteerde opleidingen van het Nederlandse HO: de bacheloropleidingen bedrijfskunde en economie van de Universiteit Maastricht (UM). Wiskunde en statistiek spelen een heel cruciale rol in deze twee gammastudies, zowel als doel op zichzelf in vakken als onderzoeksmethoden, als in de vorm van ondersteunende technieken in vakken als micro-economie, financiering en marketing. Omdat juist deze studies veel studenten trekken en in internationalisering voorop lopen, vormen ze een interessant onderzoeksterrein voor de aansluitingsproblematiek wiskunde (zie ook [7]).

De Maastrichtse context: internationalisering
Variatie in wiskundebeheersing van Nederlandse studenten is groot omdat verschillende vwo-profielen toegang geven tot de opleidingen economie en bedrijfskunde. Bij de UM is de heterogeniteit nog groter doordat een vrij stabiel aandeel van tweederde van de ongeveer 800 jaarlijkse eerstejaars uit Duitse studenten bestaat, voornamelijk afkomstig uit het nabij gelegen Roergebied. Een kwart van de studenten is Nederlands, de kleine minderheid van overige studenten is uit een groot aantal landen afkomstig. Nederlandse en Duitse schoolsystemen verschillen aanzienlijk, zowel in de vakken die onderwezen worden, de manier waarop dit onderwijs plaats vindt, en de wijze van examinering. In Duitstalige landen wordt wiskunde op twee niveaus onderwezen: basisniveau of 'Grundkurs', en uitgebreid niveau of 'Leistungskurs'. Studenten doen slechts in een viertal vakken eindexamen ('Abitur'): twee vakken op Leistungskurs-niveau, en twee op Grundkurs-niveau. Studenten kunnen dus het vak wiskunde op Grundkurs-niveau doen, maar niet opnemen in hun Abitur, waardoor ze in de laatste jaren van hun schoolopleiding maar een beperkt aantal uren wiskunde krijgen. Dankzij de Engelstalige opleiding krijgt de UM ook relatief veel studenten met een internationale vooropleiding. Ook voor die Internationale Baccalaureaatopleiding (IB) geldt dat er een tweetal wiskundeniveaus zijn: HL, het uitgebreide niveau en SL, het basisniveau. Alle overige studenten zijn op één hoop gegooid, en hun is gevraagd hun eigen wiskundige vooropleiding in te delen in de categorieën basis of uitgebreid.
Figuur 1 geeft de onderverdeling weer van de 796 eerstejaars studenten in het huidige studiejaar die de vragenlijst naar vooropleidinggegevens hebben beantwoord.

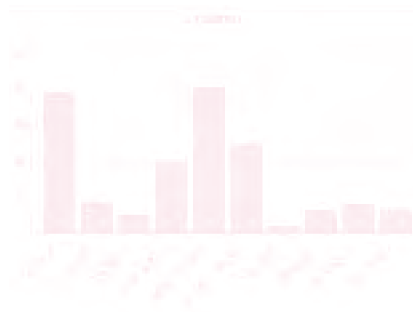
3TU-instaptoets
In het kader van het NKBW-project is in de allereerste week van dit studiejaar bij eerstejaars studenten de 3TU2005-instaptoets wiskunde afgenomen. Dat staat een vergelijking met de drie TU's toe, naast een vergelijking van vooropleidingen. ***Tabel 1*** geeft een uitsplitsing van de UM-deelnemers naar vooropleiding, met de aantallen studenten en de gemiddelde score op de instaptoets, waarbij de volgorde in de tabel wordt bepaald door de hoogte van de gemiddelde score.

	Vooropleiding	aantal	score
VWOA12	Vwo-diploma, wiskunde op niveau A12	145	37,0%
GrundkursNotExam	Duitse vooropleiding, basiswiskunde, niet in eindexamen	115	40,9%
GrundkursExam	Duitse vooropleiding, basiswiskunde, in eindexamen	184	45,3%
MathMinor	Buitenlandse, niet-Duitstalige vooropleiding, basiswiskunde	25	45,3%
VWOB1	Vwo-diploma, wiskunde op niveau B1	33	48,0%
IBMathSL	Internationaal Baccalaureaat, basiswiskunde	24	48,0%
VWOB12	Vwo-diploma, wiskunde op niveau B12	17	51,6%
MathMajor	Buitenlandse, niet-Duitstalige vooropleiding, uitgebreide wiskunde	30	52,4%
IBMathHL	Internationaal Baccalaureaat, uitgebreide wiskunde	9	55,1%
Leistungskurs	Duitse vooropleiding, uitgebreide wiskunde	96	57,9%
	totaal	679	45,4%

tabel 1 Deelnemers aan instaptoets en gemiddelde scores, naar vooropleiding

De 3TU-instaptoets is qua samenstelling van onderwerpen afgestemd op de Wiskunde-B vooropleiding. De toets bevat een vijftal onderwerpcategorieën: algebraïsche rekenvaardigheden, e-macht en logaritme, vergelijkingen, goniometrie, differentiëren en integreren. De categorie goniometrie, en het onderdeel integreren uit de laatste categorie, vallen buiten het Wiskunde-A-programma, en dus ook buiten de instroomeis voor de UM-opleidingen. Daarom is de instaptoets afgenomen in een iets gewijzigde vorm: ook als meerkeuzetoets, maar met een extra vijfde optie, ‘onbekend’. Dat staat studenten toe om een vraag waarvoor ze onvoldoende voorkennis hebben, onbeantwoord te laten in plaats van gedwongen te gokken. Om een vergelijking met de toetsuitkomsten van de drie TU’s mogelijk te maken, zijn de antwoorden in de categorie onbekend toegerekend aan de andere antwoorden volgens het gokmodel. Wanneer daarna een vergelijking wordt gemaakt met scores behaald aan de TU-instellingen, dan blijkt dat UM-studenten met een B-profiel, dat wil zeggen alle studenten met een uitgebreid wiskundepakket, in dezelfde range scoren als de TU-studenten (1330 studenten uit tien TUD-opleidingen scoorden bijvoorbeeld tussen 40% en 68% met een gemiddelde van 49%, acht TU/e-opleidingen scoorden tussen 49,5% en 64,5%, met een mediaan van 52,7%). Voor studenten met een B-profiel is de beheersing van wiskunde dus kennelijk niet een cruciale factor in de keuze tussen een gamma- of bèta-vervolgopleiding.
Wanneer in Tabel 1 scores worden vergeleken, valt op dat vwo-ers zich in de achterhoede bevinden. Studenten met een buitenlandse of internationale vooropleiding, zowel MathMajor, IBMathHL en heel sterk Leistungskurs, onderscheiden zich positief van studenten met een vwo B1-opleiding, en zelfs ook van die met een B12-opleiding. En aan de linkerkant van de verdeling: studenten met een Grundkurs, ook als dat geen onderdeel van het Abitur uitmaakt, MathMinor-studenten en IBMathSL-studenten overtreffen de vwo A12 studenten, meestal zelfs in aanzienlijke mate.

figuur 1 Aantallen studenten naar vooropleiding





figuur 2 Totaalscores naar vooropleiding

Prestaties op deelgebieden

Tabel 2 geeft een overzicht van de toetsprestaties van UM-studenten op de deelgebieden van de instaptoets: algebraïsche rekenvaardigheden, e-macht en logaritme, vergelijkingen, goniometrie, en differentiëren en integreren. Studenten zijn ingedeeld naar vooropleiding, en vooropleidingen staan op volgorde van gemiddelde totaalscore.
Figuur 2 bevat dezelfde informatie als de totaalkolom in tabel 2, in grafische vorm, terwijl ***figuur 3*** een grafische weergave is van de eerste kolom: scores op algebraïsche rekenvaardigheden.

tabel 2 Scores op de vijf deelgebieden van de instaptoets, naar vooropleiding

	algebraïsche rekenvaardigheden	vraagstuk 2	vraagstuk 3	e-macht en logaritme	vergelijkingen	goniometrie	differentiëren en integreren	totaal
VWOA12	46%	17%	33%	41%	52%	25%	25%	37%
GrundkursNotExam	60%	60%	50%	41%	58%	26%	24%	41%
GrundkursExam	65%	71%	54%	48%	62%	27%	28%	45%
MathMinor	63%	65%	57%	42%	59%	33%	32%	45%
VWOB1	56%	31%	46%	50%	61%	36%	39%	48%
IBMathSL	70%	56%	65%	47%	66%	28%	33%	48%
VWOB12	62%	72%	43%	51%	71%	43%	37%	52%
MathMajor	83%	82%	85%	50%	63%	39%	28%	52%
IBMathHL	83%	100%	61%	58%	55%	31%	44%	55%
Leistungskurs	79%	87%	79%	63%	75%	31%	43%	58%
totaal	63%	58%	54%	47%	61%	29%	30%	45%

Omdat de ordening is gebaseerd op gemiddelde totaalscore, is het belangwekkend te bezien waar de staafdiagrammen van figuur 3 geen monotone toename weergeven: dat is een signaal dat voor dat onderwerp de rangorde afwijkt. De meer geavanceerde onderwerpen uit de toets, vergelijkingen, goniometrie, en differentiëren en integreren, geven aan dat vwo-studenten het daar relatief goed doen. Vooral de vwo-B-studenten kunnen zich in die onderwerpen goed meten met studenten met buitenlandse of internationale opleidingen, en doorbreken zo het eerder geschetste algemene patroon. Maar als vwo'ers het op die terreinen verhoudingsgewijs goed doen, moet er ook een terrein zijn waar ze het verhoudingsgewijs slecht doen. Dat onderwerp is niet moeilijk te vinden: het onderwerp algebraïsche rekenvaardigheden geeft dramatische prestaties weer voor alle drie vwo-categorieën. Zo sterk zelfs, dat alle vwo-B-studenten lager scoren dan Grundkurs, MathMinor en IBMathSL studenten!

Analyse van de prestaties op individuele vraagstukken

Het beeld wordt nog duidelijker, wanneer we de prestaties op een tweetal vraagstukken uit de instaptoets nader bekijken: vraagstukken 2 en 3, beide onderdeel van de categorie algebraïsche rekenvaardigheden. Vraagstuk 2 wordt hieronder weergegeven.

$\dfrac{x^2-x}{x^2-2x+1}$ is gelijk aan:

a. $\dfrac{x}{1-x}$ **b.** $\dfrac{1}{2x-1}$ **c.** $\dfrac{-x}{-2x+1}$ **d.** $\dfrac{x}{x-1}$

De derde antwoordoptie vertegenwoordigt een heel intuïtieve oplossingsstrategie: laat de kwadratische termen in teller en noemer van de breuk tegen elkaar wegvallen, zodat enkel de lineaire termen en constante overblijven. Hoe naïef die oplosstrategie ook is, studenten met zowel vwo-A12- als vwo-B1-vooropleiding kiezen er massaal voor (***zie tabel 2***). Opmerkelijk genoeg gaat de heel lage goedscore van die studenten gepaard met een 'onbekend'-score van nagenoeg nul: iedereen denkt deze leerstof te beheersen. Meer dan enig ander vraagstuk lijkt vraagstuk 2 een aanwijzing te geven waar het probleem van het wiskundeonderwijs op vwo-A en vwo-B1 zich het duidelijkst manifesteert: in de vaardigheid concepten toe te passen die in de onderbouw onderwezen worden, met als gevolg dat studenten meer geavanceerde concepten wel oppikken, maar in problemen komen bij toepassingsvraagstukken waar ook basale rekenstappen in voorkomen.

De volgende opgave, die het gelijknamig maken van breuken als onderwerp heeft, stelt dezelfde groepen studenten voor problemen, met het opmerkelijke verschil dat ook vwo-B12-studenten het nu verhoudingsgewijs slecht doen (met de kanttekening dat die groep klein is, wat interpretatie lastig maakt).

$\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{x}{x-1}$ is gelijk aan:

a. $\dfrac{2x}{2x-2}$ **b.** $\dfrac{2x^2}{x^2-1}$ **c.** $\dfrac{2x^2}{1-x^2}$ **d.** $\dfrac{2x}{x^2-1}$

Aanvullende gegevens: vergelijking vakattitudes

In aanvulling op de afname van de instaptoets zijn studenten bevraagd op hun percepties van een aantal voor leerprocessen van belang zijnde studentkenmerken. In deze sectie komen de attitudes die studenten hebben tegenover de verschillende vakken die ze in hun studie tegenkomen aan bod; uit onderzoek blijkt dat deze zelfpercepties belangrijke determinanten van leren zijn. Die vakattitudes hebben we gemeten met een in internationaal onderwijsonderzoek veel gebruikte vragenlijst (zie [8]). De vragenlijst onderscheidt per vakgebied zes attitudes: affectie voor het vak, zelfperceptie van cognitieve competentie (of zelfconcept), de aan het vak toegekende waarde, gepercipieerde makkelijkheid of gebrek aan moeilijkheid, interesse en tenslotte inzet in het leren. Al deze attitudes zijn gemeten voor de vier vakgebieden die de UM-studenten in de eerste blokperiode bestuderen: wiskunde, statistiek, organisatieleer en marketing. Attitudes voor de eerste twee vakgebieden komen sterk overeen, evenals die voor de laatste twee; om die reden zullen we ons hier beperken tot wiskunde en organisatieleer (bètavak versus gammavak). ***Figuur 4*** geeft een grafisch overzicht van de gemiddelde scores voor cognitieve competentie in de twee vakgebieden, naar vooropleiding. Gekozen wordt voor deze variabele omdat die als beste voorspeller voor schoolprestaties



figuur 3 Scores algebraïsche rekenvaardigheden naar vooropleiding



figuur 4 Gemiddelde scores van cognitieve competentie voor wiskunde en organisatieleer naar vooropleiding

bekend staat; het patroon van de andere vijf attitudes is echter zeer vergelijkbaar.
Vakattitudes voor organisatieleer zijn om twee redenen in de analyse meegenomen. Allereerst zijn ze een vergelijkingsmaatstaf voor de beoordeling van wiskundeattitudes. Maar daarnaast vervullen ze een tweede rol: in de mate waarin vakattitudes voor een gammavak als organisatieleer vergelijkbare uitkomsten geven voor de verschillende vooropleidingen, is dat een aanwijzing dat selectie-effecten onwaarschijnlijk zijn. Indien namelijk selectie bij bijvoorbeeld buitenlandse studenten optreedt, dan is de attitude voor organisatieleer, een kernvak voor de studie bedrijfskunde en economie, het eerste waar je een verschil verwacht te vinden. Maar scores op die attitude zijn juist opmerkelijk constant.
Allesbehalve constant zijn de wiskundeattitudes. Die fluctueren sterk in een verwachte richting: voor elk type vooropleiding geldt dat studenten met een zwaardere wiskundecomponent veel gunstiger wiskundeattitudes hebben; de verschillen zijn fors, en statistisch zeer significant. Naast dat verwachte patroon valt op dat alle zes attitudes hun dieptepunt vinden bij de scores van de vwo-A12-studenten. Nergens zijn de scores lager, en nergens zijn de

verschillen tussen attitude voor organisatieleer en wiskundeattitude groter dan bij juist deze vooropleidinggroep. Opmerkelijk groot zijn daarbij ook de verschillen tussen vwo A12, B1 en B12; voor studenten met andere vooropleidingen zijn de verschillen in wiskundeattitudes tussen studenten met basaal wiskundepakket en met een uitgebreid wiskundepakket steeds fors geringer. Dat is een opmerkelijk gegeven, omdat op voorhand juist de grootste verschillen werden verwacht bij de specifieke groep van Duitse studenten die ervoor koos geen wiskunde in het eindexamen op te nemen.

Aanvullende gegevens: autonoom studeren

De meest verrassende resultaten komen echter uit een andere vragenlijst, ontwikkeld door onderwijskundigen van de Universiteit van Amsterdam (zie [9]), om vast te stellen hoe goed studenten uit de voeten kunnen binnen een leeromgeving gebaseerd op constructivistische leerbenaderingen, zoals het studiehuis. In dat instrument, de Rapportage Autonoom Studeren, worden studenten gevraagd een oordeel te geven van de eigen metacognitieve vaardigheden. In ons onderzoek hebben we gebruik gemaakt van de Engelstalige versie van dit instrument (zie ook [10]). De vragenlijst onderscheidt drie typen metacognitieve kwaliteiten: metacognitieve kennis (k: kennis met betrekking tot leren en studeren), metacognitieve regulatie (r: de vaardigheid om het studeren systematisch te sturen), en metacognitieve ontwikkeling of responsiviteit (o: informatiegevoelige en onderzoekende houding). ***Figuur 5*** geeft een overzicht van de zelfscores van metacognitieve vaardigheden.



figuur 5 Gemiddelde scores van metacognitieve kennis (k), metacognitieve regulatie (r), en metacognitieve ontwikkeling (o) naar vooropleiding

Het verrassende van figuur 5 zit natuurlijk in het verschil tussen studenten met een studiehuisverleden en zij die dat niet hebben. Een verschil dat precies tegengesteld is aan wat op basis van het studiehuis verwacht zou worden: juist de leerlingen die het langst hebben verkeerd in een onderwijsomgeving gebaseerd op autonoom leren, geven aan zich het minst geëquipeerd te voelen om autonoom te leren. Verder lijkt het dat studenten met een zwaarder wiskundepakket iets lager scoren, vooral op metacognitieve ontwikkeling, dan studenten met een lichter wiskundepakket, met als uitzondering de kleine restgroep.

Conclusie

Sinds een aantal jaren geven instellingen van HO-bijspijkercursussen wiskunde in het kader van verbetering van de aansluiting. De focus van deze cursussen ligt vaak op basale wiskundige vaardigheden. Op basis van onze studie lijkt die focus uiterst adequaat gekozen: het is bij uitstek op dit aspect dat vwo'ers pover scoren in vergelijking tot studenten met andere vooropleidingen. De voor de deur staande vernieuwingen in het wiskundeonderwijs zouden hierin ook een belangrijke stap kunnen zetten, waarbij het van belang is na te gaan of die vernieuwingen tevens gepaard gaan met een verbetering van wiskundeattitudes van de leerlingen, vooral van de leerlingen met een vwo A pakket. Goede beheersing van basale wiskundevaardigheden is immers voor vervolgonderwijs, en zeker dat in gammastudies als economie en bedrijfskunde, van groter belang dan kennis van meer geavanceerde wiskundige concepten. Een breder punt van zorg is tenslotte het patroon dat uit de laatste vragenlijst naar voren komt: kennelijk is drie jaar studiehuiservaring niet voldoende om leerlingen te laten groeien in hun zelf gepercipieerde capaciteiten tot autonoom leren, en lijkt het eerder hun zelfconcept te verminderen. Wellicht dat ook daar het versterken van basiskennis een sleutel naar succes kan zijn.

Referenties en noten

[1] NKBW-site: *www.fi.uu.nl/nl/nap/*

[2] L. van Gastel, H. Cuypers, V. Jonker, E. van de Vrie, P. van der Zanden (red.) (2007): *Eindrapport Nationale Kennisbank Basisvaardigheden Wiskunde*. Amsterdam: Consortium NKBW (zie [1] voor de website).

[3] D. Tempelaar, B. Rienties, A.J.M. van Engelen, N. Brouwer, A. Wieland, M. van Wesel (2007): *Web-Spijkeren I & II, wiskunde reparatieonderwijs*. In: *Onderwijs Innovatie*, no. 2, juni 2007; pp. 17-26 (zie: *www.ou.nl/Docs/TijdschriftOI/OI_juni_2007.pdf*).

[4] D. Tempelaar (2007): *Onderwijzen of bijspijkeren?* In: *Nieuw Archief voor Wiskunde*, 8(1); pp. 55-59.

[5] SIGMA-site: *http://e-learning.surf.nl/sigma*

[6] Werkgroep 3TU (2006): *Aansluiting VWO en Technische Universiteiten*. In: *Euclides*, 81(5), maart 2006; pp. 242-247.

[7] J. van de Craats (2007): *Contexten en eindexamens*. In: *Euclides*, 82(7), mei 2007; pp. 261-266.

[8] D. Tempelaar, B. Rienties, W. Gijselaers (2006): *Internationalisering; en de Nederlandse student?* In: *Onderzoek van onderwijs*, 35(3); pp. 40-45.

[9] M. Elshout-Mohr, M.M. van Daalen-Kapteijns, J. Meijer (2001): *Constructie van het instrument "Rapportage Autonoom Studeren"*. Amsterdam: SCO-Kohnstamm Instituut en Instituut voor de Leraren Opleiding (ILO).

[10] D. Tempelaar, B. Rienties, W. Gijselaers (2007): *Internationalisering, leerbenaderingen van Nederlandse en Duitse studenten*. In: *Onderzoek van onderwijs*, 36(1); pp. 4-9.

Over de auteurs

Dirk Tempelaar is verbonden aan de Universiteit Maastricht als universitair docent, verantwoordelijk voor eerstejaars onderwijs in de wiskunde en statistiek, en bijspijkeronderwijs. Hij heeft deelgenomen aan het NKBW-project als implementatieprojectleider, en aan projecten WebSpijkeren I en II.
E-mailadres: *D.Tempelaar@ke.unimaas.nl* .
Wim Caspers is verbonden aan de TU Delft als vwo-docent 'in residence' en aan het Adelbert College in Wassenaar als conrector onderwijs a.i. Hij is lid van de kerngroep van SIGMA en heeft deelgenomen aan het NKBW-project als implementatieprojectleider. Bovendien is hij lid van de Resonansgroep wiskunde.
E-mailadres: *W.Caspers@adelbert.nl* .

De ideale, veilige disco

EEN MODULE VOOR GEÏNTEGREERD BÈTA-ONDERWIJS IN 4-VWO

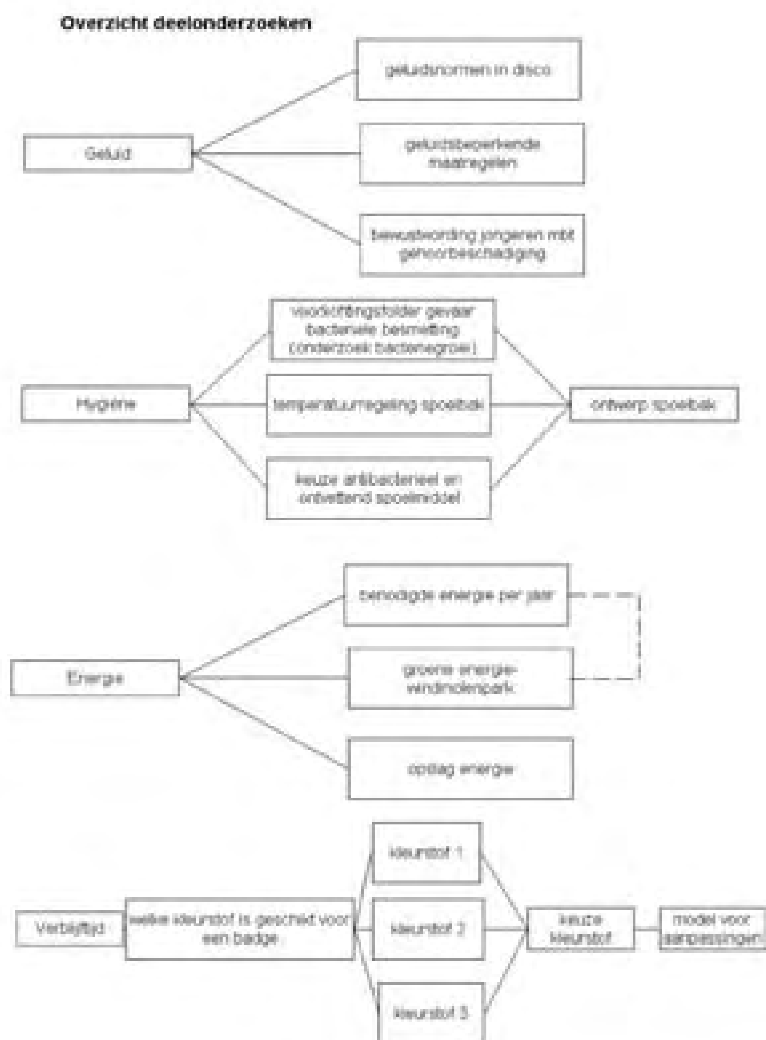
[Patrick van Aarle, Kees Gondrie, Irma van Raaij, Miek Scheffers]

Samenhang tussen de exacte vakken, contextgericht en uitdagender onderwijs, de leerling verantwoordelijk in het leerproces. Een module voor 4-vwo ontwikkelen met die uitdagende doelstellingen, daar stonden de secties biologie, natuurkunde, scheikunde en wiskunde op Gymnasium Beekvliet te Sint-Michielsgestel samen voor. En het liefst zonder de traditionele scheiding tussen deze vakken. Het resultaat: 'De disco, een module voor geïntegreerd bèta-onderwijs in 4-vwo.'

Inleiding

'Dames en heren van de firma Biwains, voordat wij u ons advies over de geluidsvoorzieningen in de disco gaan geven, stel ik u eerst voor aan mijn collega's die het advieswerk voor u hebben verricht.' Op overtuigende wijze opent een van onze leerlingen de presentatie van haar team. Helemaal opgaand in hun adviseursrol doen de leerlingen vervolgens uit de doeken wat de verstandigste keuzes zijn als het gaat om geluidsnormen en het voorkomen van gehoorschade en hoe jongeren bewust gemaakt kunnen worden van de gevaren van geluid. De directieleden van de denkbeeldige firma Biwains, normaliter 'gewoon' docent aan Gymnasium Beekvliet, horen het vol interesse aan. Ze luisteren naar het resultaat van een intensief leerproces.

figuur 1 Overzicht van de deelonderzoeken



Opbouw en inhoud van de module

In de module zijn de leerlingen medewerkers van een adviesbureau en gaan zij in teams van zes personen aan het werk.
Bij de start krijgen ze te horen dat zij, als medewerkers van de onderzoeksafdeling van bureau Lightning, advies moeten gaan uitbrengen aan de firma Biwains, die van plan is een discotheek te bouwen. Biwains heeft opdracht gegeven advies uit te brengen op het gebied van geluid, energievoorziening, hygiëne en verblijftijd in de disco. De directie van bureau Lightning heeft al een offerte ingediend waarin staat wat het adviesbureau aan adviezen zal leveren. Alleen moet dat onderzoeks- en advieswerk nog wel gebeuren. De adviseurs in spe weten derhalve wat er van hen verwacht wordt: werk aan de winkel!
In ***figuur 1*** staan de (deel)opdrachten weergegeven die uit de aanvraag en de offerte volgen. Daarbij is te zien dat het werk binnen het team kan worden opgesplitst en dat de deelteams op verschillende manieren van elkaar afhankelijk zijn. Aan de leerlingen de opdracht om ervoor te zorgen dat iedereen óók weet wat de anderen binnen het team gedaan hebben.

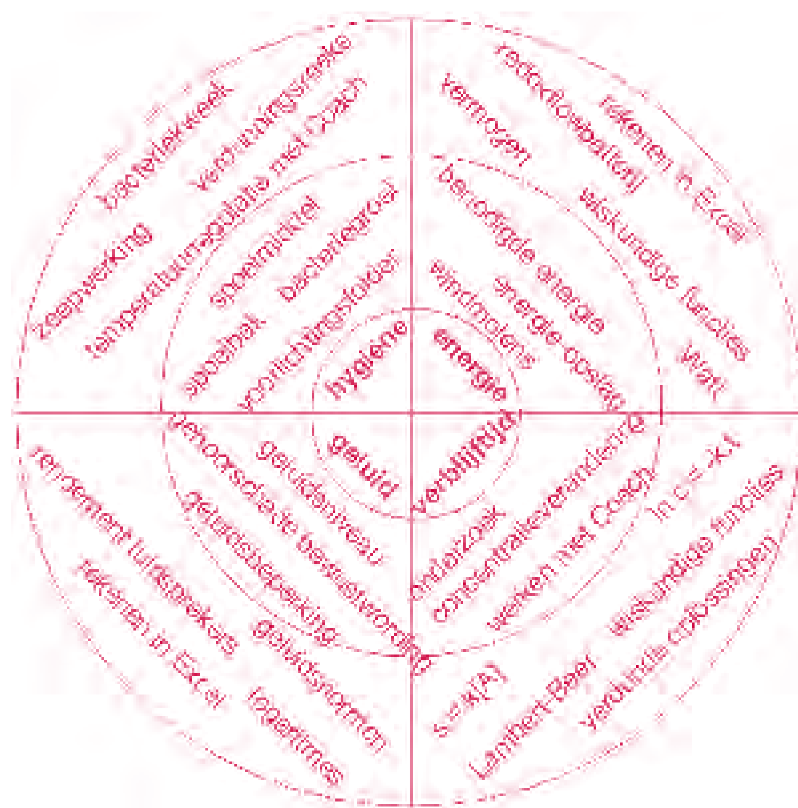
De module neemt vier weken in beslag; in die weken zijn de tien reguliere lessen wiskunde, natuurkunde, scheikunde en biologie geclusterd tot een dagelijks blokuur. Voldoende tijd om het onderzoek te doen en de experimenten uit te voeren. Het inlezen in een nieuw onderwerp, de adviesrapportage en de voorbereiding van de presentatie moeten daarentegen buiten de lesuren gebeuren.

De adviesteams werken in een roulerend schema aan de vier opdrachten. Steeds wordt begonnen met inlezen: er is een dossier per onderwerp, waarin de opdracht en allerlei ondersteunende achtergrondinformatie zijn opgenomen. Veelal onderwerpen die compleet nieuw zijn en opdrachten die

tamelijk complex overkomen. ‘De eerste dag van de week was het altijd een beetje onduidelijk wat je moest doen, maar als je je er eenmaal in had verdiept, bleek het meestal toch wel mee te vallen’, schrijft een leerling in de evaluatie. Gelukkig worden de taken snel en goed verdeeld en gaan de teams fanatiek aan het werk. Nergens staat *precies* wat ze moeten doen, maar de geleverde bronnen bevatten voldoende informatie. ‘Het was fijn om zelfstandig te werken en zelf beslissingen te mogen nemen, maar omdat je zo veel vrijheid had, werd de keuze soms wel moeilijk.’
Uiteraard moeten er resultaten worden verkregen door middel van experimenten. In het deel ‘hygiëne’ wordt bijvoorbeeld onderzocht welk spoelmiddel het best is qua ontvettende en antibacteriële eigenschappen. En er wordt een systeem ontwikkeld om het water in een spoelbak op een constante, ideale temperatuur te houden. Bij ‘verblijftijd’ wordt onderzocht welke kleurstof het meest geschikt is voor zelfontkleurende badges die discobezoekers, afhankelijk van hun leeftijd, gaan dragen. Zo kan voor verschillende leeftijdsgroepen de verblijfsduur worden geregeld. Veel metingen derhalve, met het tot dan toe voor de leerling nog tamelijk onbekende meetprogramma Coach.
De onderdelen ‘energievoorziening’ en ‘geluid’ zijn wat theoretischer van aard: in steeds ingewikkelder wordende Excel-berekeningen rekenen de teams onder andere uit hoeveel energie de disco gaat gebruiken en hoe de luidsprekers moeten worden in- en opgesteld om gehoorschade te voorkomen. Bovendien wordt een folder ontwikkeld die jongeren op de gevaren van te veel geluid moet wijzen. ‘Het was fijn dat er twee theoretische en twee praktijkgerichte gedeeltes waren; die wisselden elkaar goed af’, schrijft een leerling.

Ook anders voor de docenten...

Na een half jaar ontwikkelwerk hebben we de module in het voorjaar van 2007 met één klas uitgevoerd. Het bleek ook voor ons als docenten en voor de toa’s (technisch onderwijsassistenten) een heel nieuwe manier van werken. Elk lesuur was er (minimaal) één vakdocent beschikbaar, die samen met de aanwezige toa’s het geheel begeleidde. De rol van begeleider is een andere dan die van docent, zeker als een aantal onderwerpen niet specifiek tot je vakgebied behoort. Het steriliseren van het materiaal om een goede bacteriekweek te maken is geen dagelijkse kost voor een natuurkundige en het rekenen aan reactiesnelheden ook niet voor een wiskundige. Een goede voorbereiding, elkaar goed informeren, was en is dus een eerste vereiste. In de praktijk bleek het goed te lopen; voor té specialistische vragen (en reken maar dat leerlingen daarmee kwamen!) kon altijd nog naar een van de collega’s verwezen worden. Datzelfde geldt voor de toa’s, die op alle vakgebieden meedenken en begeleiden. Een toa merkt op: ‘Ik vond het een leuke verdieping. Ook het begeleiden van de leerlingen is prettig: ze ideetjes aan de hand doen als ze even vast zitten, samen met ze nadenken over een oplossing. Je ziet dat ze er dan helemaal voor gaan. Ik heb er net zoveel van geleerd als van een cursus.’



figuur 2 Thema’s (binnencirkel), hoofddoelen (middenring), deelconcepten en vaardigheden (buitenring)

De afronding

Na vier weken krijgt elk team te horen welk van de vier uitgebrachte adviezen ze mogen presenteren. Nerveus maar vastberaden staan ze een week later klaar. De zenuwen worden wat gevoed door de grote opkomst bij de presentaties. Niet alleen de andere teams en de begeleidende docenten, maar ook geïnteresseerde collega’s, de rector en een enkele buitenstaander zitten in het lokaal. Zodra het eerste adviesteam is aangekondigd, blijken de zenuwen onnodig: alle teams leven zich prima in hun adviseursrol in en leggen geduldig uit wat ze in de afgelopen weken hebben ontdekt - wat hen betreft kan die nieuwe disco er morgen komen! Aan het einde van de presentatie bieden de adviseurs hun uitgebreide adviesrapport - de schriftelijke onderbouwing van het gepresenteerde advies - dan ook vol overtuiging aan de directie van Biwains aan.
De presentaties en adviesrapporten zijn door de begeleidende WiBiNaSk-docenten beoordeeld. Om recht te doen aan de doelstelling ‘*zonder de traditionele scheiding tussen deze vakken*’ is er een totaalcijfer gegeven en geen deelcijfer per vak gemaakt. Dit jaar hebben we er voor gekozen om dat totaalcijfer bij ANW onder te brengen, in de toekomst wordt het wellicht een cijfer voor het vak NLT.

Wat vonden de leerlingen ervan?

Leerlingen oordelen na afloop erg positief over de module. Niet alleen de opzet - ‘heel anders dan gewone lessen en dat is erg leuk’ - maar ook de zelfstandige manier van werken wordt als prettig ervaren. ‘Ik heb erg veel vaardigheden opgedaan, met name het werken met Coach en Excel’, schrijft een leerling.
Kan de module de lesstof vervangen? ‘Je leert de vakinhoud toch niet zo goed als

in gewone lessen', zegt een leerling. De natuurkundedocent denkt daar echter heel anders over: 'Ik zie ze veel beter rekenen aan geluidsintensiteiten dan na het maken van een paar sommen uit het boek. Ze weten echt waar ze het over hebben.' En ook bij de lessen scheikunde over reactiesnelheid, later in het schooljaar, blijkt dat ze de basisbegrippen goed hebben opgepikt. Hoe het ook zij, de reacties zijn zeer bemoedigend. Voor ons voldoende reden om met de vele opmerkingen en verbetertips van onze 'testklas' het materiaal bij te schaven voor dit schooljaar.

Leerdoelen

Bij het ontwerpen van de module zijn we uitgegaan van leerdoelen waarin we zowel concepten als vaardigheden hebben geformuleerd. In ***figuur 2*** staat een deel van de leerdoelen, concepten en vaardigheden per onderdeel weergegeven.
Ook hebben we per vak voor de concepten en vaardigheden bekeken of het ging om toepassen van bestaande kennis/vaardigheden of juist om nieuwe kennis/vaardigheden. In ***figuur 3*** staat als voorbeeld een overzicht weergegeven voor het vak wiskunde.
Terugkijkend zijn we als ontwikkelteam tevreden: leerlingen hebben in de beschikbare tijd in voldoende mate kennisgemaakt met bèta-brede vakinhoudelijke kennis en vaardigheden. Bovendien hebben ze kunnen ontdekken dat in het dagelijks leven samenhang tussen de diverse bètavakken iets heel natuurlijks is.

Praktisch bezig

En nu...

De vervolgstap is duidelijk: in het voorjaar van 2008 gaan we de module uitvoeren in alle vierde klassen in de N-stroom. Dat vereist aanpassing van de module op basis van onder meer de vele opmerkingen en verbetertips die onze 'testklas' ons gegeven heeft. Maar een vervolgstap vereist vooral ook het informeren van collega's die de module niet mee ontwikkeld hebben, via uitgebreide docentenhandleidingen en studiemiddagen. En nadenken over het opschalen van de module: hoe zorg je ervoor dat het uitvoerbaar blijft, kijkend naar practicummaterialen, lokalen, roosters. Al met al is er nog veel te doen, maar de eerste ervaringen waren zó positief dat we al uitkijken naar de 'tweede ronde'.

Interesse, vragen?

Op 1 april 2008 is er op Gymnasium Beekvliet te Sint-Michielsgestel gelegenheid om uitgebreid met de module kennis te maken. Geïnteresseerden voor deze kennismaking kunnen contact opnemen met Miek Scheffers (*m.scheffers@gymnasiumbeekvliet.nl*). Het leerlingen- en docentenmateriaal van deze module (mede mogelijk gemaakt door een subsidie van het Kenniscentrum van OMO) stellen we u dan graag ter beschikking. Ook voor vragen kunt u contact opnemen met Miek Scheffers.

Noot (red.)

Deze bijdrage is een bewerking van een artikel dat eerder verscheen in *NVOX* (33e jaargang nr. 1, januari 2008), magazine voor natuurwetenschap op school, het periodiek van de NVON.

Over de auteurs/ontwikkelaars

Dit artikel werd geschreven door de ontwikkelaars van de module, te weten Patrick van Aarle (natuurkunde), Kees Gondrie (wiskunde), Irma van Raaij (biologie) en Miek Scheffers (scheikunde), allen als docent verbonden aan Gymnasium Beekvliet te Sint-Michielsgestel.
E-mailadres contactpersoon:
m.scheffers@gymnasiumbeekvliet.nl

figuur 3 Kennis en vaardigheden in de disco voor wiskunde

	Energie	*Hygiëne*	*Geluid*	*Verblijftijd*
Toepassen	- Excel (functies en tabellen) - getalnotaties - energieberekeningen op basis van vermogen en gebruikstijd - rekenen met formules	- rekenwerk voor verdunningsreeksen	- (omgekeerd) evenredigheden: $I \sim 1/r^2$ - rendement in %	- grafieken type $y = ax$; $- E = a \cdot c$; bepaling a $- \ln(x) = k \cdot t$; bepaling k - berekeningen mbv. eenvoudige functies $p = q/r$
Nieuw	- begroting opstellen	- computerprogramma schrijven voor meten en regelen	- maken van rekenmodellen in Excel - kennismaking en rekenen met logaritme - begrip van log. schaal in grafieken - verwerken complexere wiskundige functies (log) - modelleren: aanpassen van een bestaand model	- uit meetgegevens afleiding x en y in $r = k \cdot [KI]^x[OH^-]^y$ - kennismaking met integreren - kennismaking met de functie ln - kennismaking met inwerken complexere wiskundige functies (ln en e-macht) - modelleren: van functie naar grafiek

Ik las en dacht...

[Klaske Blom]

In oude jaargangen van vaktijdschriften over ons wiskundeonderwijs vinden we regelmatig artikelen die in het licht van huidige onderwijsontwikkelingen opeens opmerkelijk worden. Soms omdat ze, geschreven in een totaal andere tijd, een verfrissend perspectief op onze huidige situatie bieden, soms omdat ze, ondanks hun gedateerdheid, verrassend actueel blijken te zijn, omdat ze tot nadenken stemmen, omdat...
In de rubriek 'Ik las en dacht...' neemt Klaske Blom u mee naar zo'n 'oud actueel artikel'.

Het Niveau, een dalende of een alternerende trend?

Ter discussie

Wat staat het onderwijs ter discussie! Van parlementaire enquêtes tot leerlingdemonstraties op het Museumplein. Eindelijk worden de vragen hardop in het openbare debat gesteld die we onszelf continu zouden moeten stellen: 'Doen we de goede dingen in ons onderwijs?' en 'Doen we ze op de goede manier?' Zorgdragen voor kwaliteit begint met het beantwoorden van deze twee. Natuurlijk, … het vraagt om een definitie van 'goed'. Natuurlijk, … zovele betrokkenen, zovele antwoorden. En ook, … bij ontkennende antwoorden op deze vragen zijn we weer terug bij af. Maar dat neemt allemaal niet weg dat de vragen gesteld moeten worden.
En tegelijkertijd moeten we gewoon doorwerken, lesgeven, het goede doen. Soms weet ik even niet hoe ik dat voor elkaar moet krijgen, als er zoveel in het onderwijs ter discussie staat. Een van mijn oplossingen is me tijdelijk terugtrekken tussen de muren van mijn klaslokaal. Doen alsof ik het niet hoor, al die onrust over mijn vak. Een andere oplossing is om me er tegenaan te bemoeien, zorgen dat ik gehoord word en dat mijn werkervaring van belang is voor degenen die beleid maken. En mijn derde oplossing is altijd: lezen. Zoeken naar inspirerende lectuur om weer gesterkt of met relativering verder te kunnen. En gelukkig vind ik meestal wel wat.

NIVO...

DAT SCHREIF JE TOCH MET EEN I EN EEN e?

Ik vond een artikel van Dr. H.J.E. Beth [1] die bijna 100 jaar geleden z'n gedachten liet gaan over wiskundeonderwijs en leerlingen in zijn artikel *Het 'meer en meer wiskundig' karakter der H. B. School met 5-jarigen cursus*. Er komen verschillende zaken aan de orde die mijns inziens allemaal interessant zijn in het licht van onze huidige discussies over de onderwijsvernieuwingen. In deze rubrieksaflevering citeer ik een aantal fragmenten, en in een volgende aflevering nog een paar, in de hoop dat u het ook interessant en inspirerend vindt.
Uit het begin van Beths artikel blijkt dat na de oprichting van de HBS-B besloten is tot oprichting van de HBS-A, o.a. omdat men een opleiding met minder wiskunde voldoende achtte voor bijvoorbeeld een studie rechten. Beth heeft niets tegen de oprichting van deze nieuwe opleiding, maar ageert tegen het feit dat de HBS-A opgericht moest worden vanwege het 'meer en meer wiskundig' karakter van de HBS-B. Deze gedachte was wijd verbreid, maar volgens Beth totaal onjuist. Naar zijn mening waren de eisen aan het wiskundeonderwijs juist afgezwakt in de laatste jaren.

Afnemend wiskundig karakter

Hebben wij tegenwoordig niet de neiging te denken dat het droevig gesteld is met de inhoud van ons huidige wiskundeonderwijs? We vragen ons af of ze nog wel wat kunnen. Rekenen met breuken niet, in ieder geval… Durven we nog echt lastige zaken onder de aandacht te brengen? Vroeger begonnen we al met bewijzen in de 2e klas, nu lijkt het in 6-vwo maar amper meer te lukken om een 'zindelijke' redenering op te stellen…
In 1924 schreef Beth [2]:

> 'Hebben wij ook niet de goniometrische vergelijkingen moeten prijsgeven? Gaan wij niet (m.i. volkomen terecht) bij het aanbrengen van de eerste beginselen der meetkunde op veel eenvoudiger wijze te werk dan men een kwarteeuw geleden deed? Zonder daarom nog te vervallen in de meetkunde van schaar en stijfselpot. Maar hoevelen onzer eindexamen-candidaten zouden nog een aardig planimetrisch vraagstukje kunnen oplossen? En durven wij in de 5de klasse nog wel eens op de eerste bladzijden van het meetkundeboek terugkomen?
> Ik noemde slechts enkele punten op wiskundig gebied, en zal niet uitweiden over het log van cosmographie, mechanica en lijnteekenen! Al kan men ook tegen het vak lijnteekenen, als àl te zeer technisch, bezwaren hebben, het kòn een gewaardeerde steun zijn bij het onderwijs in planimetrie en beschrijvende meetkunde.
> Men kan over al deze wijzigingen verschillend oordelen; en ik wil niet alles afkeuren, wat men in den laatsten tijd veranderd heeft in urentabel en leerplan, maar toch moet het vreemd aandoen, na al die wijzigingen te hooren spreken van een "meer en meer wiskundig" karakter.'

Belabberd niveau

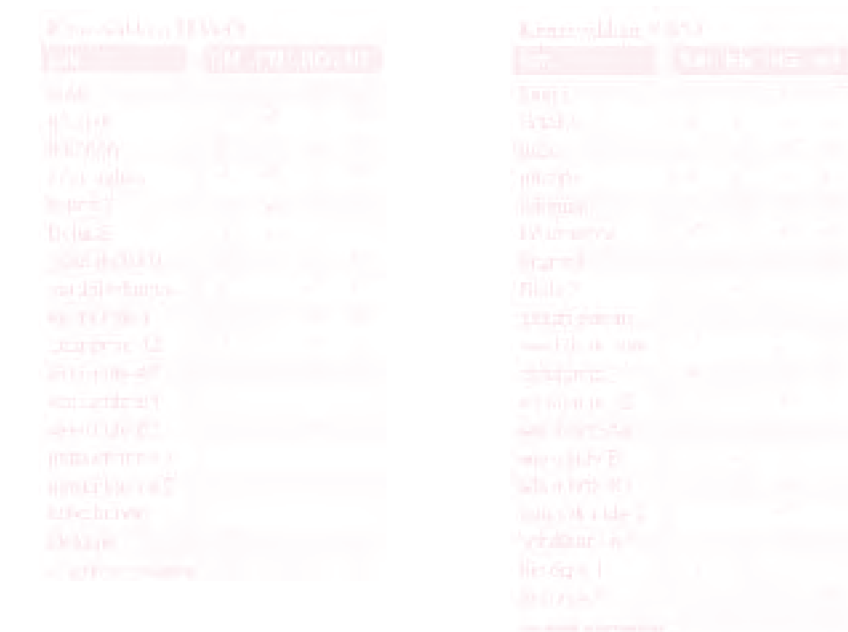
En hoe zit het met het niveau van ons huidige onderwijs? Niet alleen lijken vele onderwerpen uit de curricula verdwenen, ook het niveau lijkt te dalen. Als je leest dat ook Beth zich hierover al grote zorgen maakte, moet het niveau toch ooit wel op een fantastisch en jaloersmakend peil gestaan hebben?!

‘Er zal wel niemand zijn, die zou willen tegenspreken, dat het peil van het lagere zoowel als van het voortgezet onderwijs, natuurlijk in het algemeen gesproken, gedaald is; de oorzaken, die vermoedelijk velerlei zijn, zouden we daarbij nog in het midden kunnen laten. Wanneer men nu nog zou willen aannemen, dat de daling van het lager onderwijs in sneller tempo heeft plaats gehad dan die van het voortgezet onderwijs, dan zou daarmede verklaard zijn het beruchte verschijnsel van de “kloof”, die we thans bezig zijn te dempen met enquêtes, rapporten en aansluitingscommissies.
Men zal mij verwijten, dat ik dan de schuld van het bestaan van die kloof aan het lager onderwijs toeschrijf, hetgeen ik in hoofdzaak ook werkelijk doe. Nu moet men weer niet komen aandragen met het weinig frissche voorbeeld van het huis, waarvan men eerst het fundament legt om er daarna op voort te bouwen. Met dit beeld te gebruiken, bewijst men op de meest volledige wijze zijn ongelijk. Immers, wie een gebouw opricht, legt wel eerst de fundamenten, maar hij construeert ze in overeenstemming met het gebouw, dat erop zal moeten rusten.
Wanneer ik de schuld geef aan het lager onderwijs, dan wil ik daarmede niets zeggen ten nadeel van de onderwijzers. (…) De fout schuilt m.i. geheel in het stelsel. Men heeft voor het lager onderwijs “methoden” uitgedacht, “aanschouwingsmateriaal” geconstrueerd en het stelsel van klassikaal onderwijs geperfectioneerd op zoodanige wijze, dat de intensiteit en het tempo van de geestelijke werkzaamheid der kinderen zijn teruggedrongen tot het uiterste minimum. Men bereikt daarmede, dat aan 100% (of misschien 98%) een zekere hoeveelheid kennis en technische vaardigheid wordt bijgebracht. Ik onderschat dit in geenen deele, en wil hierbij opmerken, dat hetgeen gezegd is omtrent de daling van het peil van het lager onderwijs alleen betrekking heeft op het gedeelte der leerlingen, dat voortgezet onderwijs genieten zal, welk gedeelte mij begrijpelijkerwijze thans alleen interesseert; voor het overige deel der schoolbevolking kan wellicht de lagere school een vergelijking met een vorige periode veel beter doorstaan.
Maar door te veel gebruik (en dus misbruik) te maken van de zooeven genoemde middelen heeft zij onrecht moeten doen aan de kinderen, die voorbestemd zijn voor het voortgezet onderwijs. Zij heeft hun niet meer kunnen geven datgene, waaraan die kinderen vóóral behoefte hebben: het bewustzijn, dat het raadplegen van het geheugen niet de eenig mogelijke geestelijke werkzaamheid is. Om het kort uit te drukken: de lagere school maakt het thans haren leerlingen véél te gemakkelijk; de leerling doet geestelijk te weinig, de onderwijzer doet te veel.’

Overlading

En zijn 1040 uren nou echt te veel? Het wordt knap lastig om school er bij te doen als je vier avonden per week werkt in een restaurant. Wanneer moet je als leerling dan die praktische opdracht afmaken, waarvan de inleverdatum ook nog eens samenvalt met het afronden van het profielwerkstuk? En kent u deze: ‘Bij het invullen van de keuzewerktijduren is het me gelukkig weer gelukt om wat eerste uren vrij te houden, anders trek ik het echt niet.’ Iets nieuws onder de zon?
Beth schrijft:

‘Ik moet toegeven, dat ook andere leervakken slaag gekregen hebben, en wanneer men alleen op het examenprogramma zou letten, en op grond daarvan en na vergelijking met een vroeger programma een conclusie zou willen trekken, dan zou de qualificatie “overlading” weinig van toepassing kunnen zijn. Trouwens, of er ooit van overlading kon worden gesproken, weet ik niet; er op dit moment van te spreken is belachelijk. Deze vrees voor overlading is zeer kenmerkend voor onzen tijd, waarin met meent “het kind” geen grooter weldaad te kunnen bewijzen dan door het voor inspanning te behoeden, of het te vrijwaren tegen alles, wat niet naar zijn (des kinds) smaak (tegenwoordig zegt met liever: naar zijn aard) is. Evenmin als men het kind bij iederen maaltijd zijn lievelingsgerecht zal voorzetten, evenmin moest men zich bij het bepalen van het geestelijk voedsel al te veel laten leiden



figuur 1 Keuzevakken op ‘zo maar’ een school

door de vraag "hoe het hem smaakt". Het gevaar dreigt, dat al de "keuze", die men tegenwoordig biedt, en de "vrijheid" die men begeert, tot verslapping zal leiden en dus zal blijken te zijn geweest uit den booze. Zooals men weet, doet zich reeds aan de H.B.S. een geval voor van het moderne denkbeeld der facultatieve vakken, nl. aan het begin der 5de klasse, als de directeur aan de leerlingen beleefdelijk de vraag voorlegt: wat wenscht U te gebruiken, boekhouden of mechanica? Ik ben er nooit geheel gerust op, of bij het "overleg" van de zijde der jongelui geen argumenten verzwegen worden, die met hun aard of zelfs met hun smaak weinig te maken hebben, maar meer in verband staan met vragen als deze: welke van de beide concurreerende leeraren zou het minste huiswerk geven, en welke de hoogste cijfers?'

Het stelt mij gerust: een artikel te lezen van bijna een eeuw geleden, waarin thema's worden aangesneden die nog zo herkenbaar zijn. Ik ken de gevaren van extrapolatie, maar desondanks werkt het kalmerend als ik me realiseer dat het niet zo erg is als we er nog niet uitkomen in de komende decennia. Wordt vervolgd in een volgend nummer.

Noten

[1] Zie Biografisch Woordenboek van Nederlandse Wiskundigen (URL: *http://bwnw.nl)*

[2] Alle citaten komen uit *Het "meer en meer wiskundig" karakter der H.B.School met 5-jarigen cursus*, door Dr. H.J.E. Beth; gepubliceerd in Bijvoegsel van het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde gewijd aan onderwijsbelangen; 1e jaargang, 1924/25.

Over de auteur
Klaske Blom is redacteur van Euclides en wiskundedocent in Amersfoort aan het Meridiaan College, vestiging 't Hooghe Landt.
E-mailadres: *kablom@tiscali.nl*

Galileï en zijn GRM

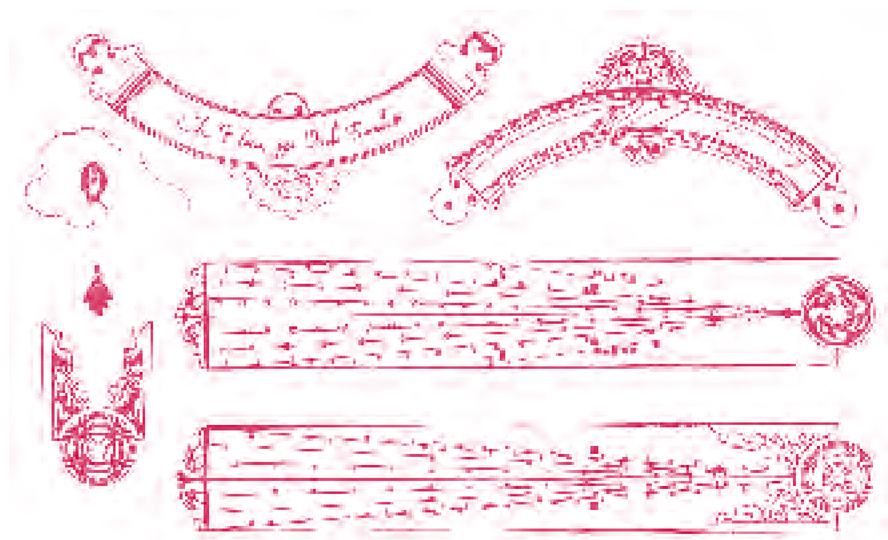
[Sieb Kemme]

Zou Galileï de grafische rekenmachine gebruiken als hij in onze tijd had geleefd? Zeker, en sterker nog, hij zou hem hebben uitgevonden en een fabriekje hebben opgericht om er aan te verdienen. Dat is namelijk wat hij deed in 1599 met zijn 'proportionaalpasser'. In zijn tijd kon die machine zo ongeveer alles uitrekenen wat toen op rekentechnisch van belang was, net zo als de GRM in onze tijd. En dat alles op strikt instrumentele wijze, zonder dat de gebruiker verstand van rekenen en wiskunde hoefde te hebben. Ook daarin ligt een analogie.

Een beschrijving van het apparaat

De naam 'passer' is in dit opzicht niet helemaal juist. In het Nederlands hebben we er geen goed woord voor. In de Engelse taal heet het instrument 'compass' of ook 'sector'. Galileï noemt het apparaat verder in zijn tekst steevast *het Instrument*.
Eigenlijk was het niet helemaal zijn eigen vinding. Passers waarmee je verhoudingen kon uitzetten, bestonden al langer. Maar het Instrument van Galileï kon veel meer. Vrijwel elke militaire berekening van die tijd kon door een leek in korte tijd worden uitgevoerd. Om het alleenrecht te kunnen behouden haalde hij zelfs een instrumentmaker in huis. In 1606 schreef hij er zijn handleiding *Le Operazioni del Compasso Geometrico et Militare* bij. Ook die werd in huize Galileï gedrukt. Maar zijn achterdocht mocht niet baten. Al een jaar later verscheen een illegale kopie.
De illustratie (zie ***figuur 1***) laat een gedemonteerde versie zien van het Instrument uit de tijd van Galileï. Getekend zijn de voor- en achterkant van een kwadrantboog en de voor- en achterkant van de benen van het Instrument. Deze benen kunnen draaien om de fraai versierde cirkels. De kwadrantboog wordt tussen de benen gemonteerd. Ook het bijbehorende schroefje en het schietlood is getekend.
Het Instrument is in alle opzichten multifunctioneel. Je kunt een lijn in een willekeurig aantal gelijke lijnstukken verdelen, je kunt van een kanonskogel het gewicht bepalen als je de diameter en het materiaal kent, je kunt de hoogte bepalen van objecten en de diepte van een put, maar je kunt ook getallen met elkaar optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen en je kunt zelfs tweede- en derdemachtswortels en de samengestelde interest berekenen en nog veel meer. Hoewel de titel van de handleiding anders suggereert, ging het niet alleen om militaire toepassingen.
In de figuur is vaag te zien dat op de benen van het Instrument verschillende schalen zijn gegraveerd, zowel op de voor- als op

figuur 1 Uit: Drake, 1978





figuur 2 Uit: Tomash et al., 2003

de achterkant. Voor de tweede- en derdemachtswortels zijn bijvoorbeeld aparte schalen gemaakt. Eén van die schalen is de gewone lineaire meetschaal, de liniaal. Met het Instrument alleen redt de gebruiker het niet. Voor het 'invoeren' en 'aflezen' van de waarden heeft hij een gewone passer nodig. Hij voert getallen in via de 'lineaire schaal' door de waarde van het getal vanaf de liniaal tussen de passerpunten te nemen, zet met de passer afstanden uit op de relevante schalen, voert de bewerkingen uit met de benen van het Instrument en 'leest' de waarden af door de gevonden afstand tussen de benen van de passer weer langs de liniaal te leggen (zie ***figuur 2***).
Een volledige beschrijving van het Instrument zou neerkomen op een vertaling van de handleiding van Galileï. Drake (1978) verzorgde een prachtige Engelse uitgave in de authentieke lay-out. We beperken ons hier tot het beschrijven van twee toepassingen: de regel van drieën en het berekenen van de hoogte van een object.

De regel van drieën

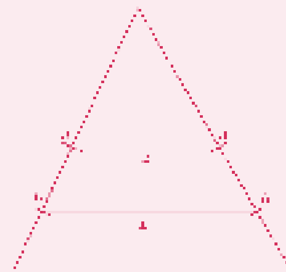
De regel van drieën was één van de basisregels uit de toenmalige rekenkunde. Hij werd gebruikt om bij drie gegeven getallen het vierde in dezelfde verhouding als de eerste twee te bepalen. Galileï schrijft:
Als 80 120 geeft, wat zal 100 dan geven? Hier heb je drie getallen in de volgorde 80 120 100. Om het vierde gezochte getal te vinden pas je het tweede van de getallen, dat is 120, af op de lengteschaal van het Instrument en dit pas je af overdwars op het eerste getal, dat is 80; dan neem je overdwars het derde getal, dat is 100 en past dit af op de lengteschaal. Wat je afleest is het vierde gevraagde getal. (Drake, 1978.)
Een figuur kan de situatie verhelderen, hoewel Galileï dat niet nodig achtte.

In figuur 3 zijn de eerste drie getallen aangegeven met a, b en c en het gevraagde vierde getal is x. Je neemt eerst de lengte c tussen je passer. Die lengte haal je van de liniaal van het Instrument. Die lengte zet je uit van a naar a tussen de benen van het Instrument. Vervolgens neem je de lengte x van b naar b tussen je passer en lees je die lengte af op de liniaal.
Uit de gelijkvormigheid van beide driehoeken volgt dat $a : b = c : x$.
De beperking van het instrument zit erin dat je niet heel grote of heel kleine lengtes kunt uitzetten. Galileï besteedt wel de nodige aandacht aan dit soort uitzonderingen.
Deze toepassing stelt de gebruiker in staat om twee getallen met elkaar te vermenigvuldigen. Galileï noemt deze toepassing niet expliciet, maar maakt er verderop wel gebruik van. Door $a = 1$ te kiezen krijg je: $1 : b = c : x$, dus $x = b \times c$.
Met de keuze $a = 100$ gaat het waarschijnlijk handiger, maar dan moet het antwoord door 100 gedeeld worden.

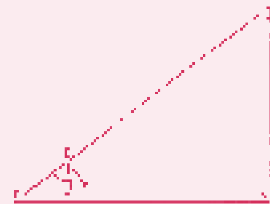
Galileï laat ook zien hoe je heel handig op deze manier samengestelde interest kunt berekenen.
Stel dat je 140 scudi vijf jaar uitzet tegen een samengestelde interest van 6%. Zet overdwars het beginkapitaal (dat is, 140) uit tussen 100-100. Meet overdwars de afstand tussen 106-106. (…) *Maak het Instrument wijder zodat deze afstand past tussen 100-100. En lees weer de afstand tussen 106-106 af.* (Naar Drake, 1978.)
Zo doorgaande kun je de groei van het kapitaal over steeds meer jaren berekenen.

Een hoogte meten

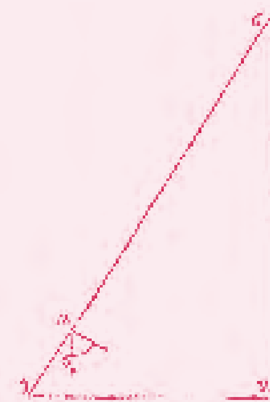
Het meten van een hoogte gaat met behulp van het kwadrant en het schietlood.
De benen van het Instrument worden haaks op elkaar gezet, zodat het kwadrant er precies tussen past. Het kwadrant bevat drie schalen: een schaal in graden die in tientallen oploopt van 0 naar 90, een schaal die met eenheden oploopt van 0 tot 12, en een schaal die met tientallen oploopt van 0 tot 100, met 100 in het midden, en dan weer afloopt met tientallen van 100 tot 0. Galileï gebruikt deze laatste schaal om hoogtes te schatten.
Hij onderscheidt twee gevallen (***zie figuur 4a en figuur 4b***):
Vanuit punt B lopen we 100 passen, of andere eenheden, naar C. Vanuit C kijken we langs een been van het Instrument naar de hoogte A, zoals te zien is in de zijde CDA, en lezen we de verdeling af die wordt aangegeven door de draad. Als de draad in het 100 gedeelte valt het verst van het oog, dan is het afgelezen aantal het aantal passen (of de andere eenheden waarmee we langs de grond gemeten hebben) van de hoogte AB. Valt de draad in het andere gedeelte van de schaal (…) *neem dan het afgelezen getal en deel dat op 10 000.* (…) *Als de draad bijvoorbeeld 50 aanwijst, deel dan 50 op 10 000 om 200 te krijgen en dat is dan de hoogte GH.* (Naar Drake, 1978.)



figuur 3



figuur 4a



figuur 4b

Waarom klopt deze manier van werken? Hoe heeft hij die schaalverdeling in elkaar gezet? In de eerste situatie is de gemeten hoek kleiner dan 45°. In het midden van de schaal, bij 100, is die hoek precies 45° en is de hoogte gelijk aan de basis dus ook 100 vanwege de 100 eenheden aan de basis (***zie figuur 4c***). Bij kleinere hoeken dan 45° heeft hij dus gewoon de hoogte *AB* in tienvouden uitgezet op het gedeelte van de schaal dat het verst van het oog verwijderd is, uitgaande van die 100 passen. Bij een ander aantal dan 100 passen geeft de afgelezen waarde het percentage aan van de gelopen afstand.
In het geval dat de hoek groter is dan 45°, zou dat problemen gaan opleveren omdat dan de getallen zo groot zouden worden dat ze niet meer op de schaal zouden passen.
Het gedeelte van de schaal van de schaal,

het dichtst bij het oog, ziet er precies zo uit als de andere helft, maar dan in omgekeerde volgorde. Ook hier kan handig gebruik gemaakt worden van gelijkvormigheid. Trek een hulplijn met hoogte 100, loodrecht op IH. Volgens het voorgaande geeft de afgelezen waarde x ook de afstand aan; ***zie figuur 4d***.
Beide driehoeken zijn gelijkvormig, dus: $100 : h = x : 100$.
Of: $x \times h = 10\,000$ en de gevraagde hoogte is dus $h = \frac{10000}{x}$.

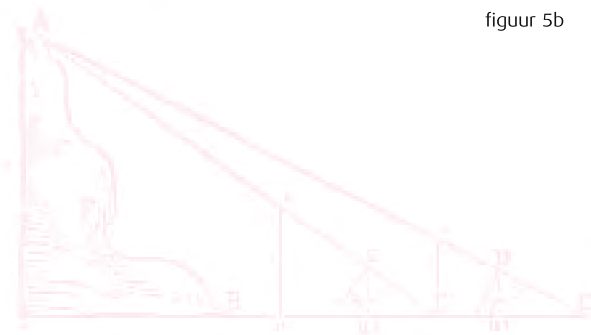
Maar wat moet je doen als je niet zo mooi vanuit de voet van de te meten hoogte die 100 passen kunt zetten, bijvoorbeeld bij het meten van de hoogte van een heuvel (***zie figuur 5a***)? Je staat in C, kijkt naar A en je leest de schaal af en:
…laat die waarde bijvoorbeeld 20 zijn; vervolgens doe je 100 passen naar voren tot punt E en je richt weer op de top A en leest de schaal F af, die 22 is. Dit gedaan hebbende, vermenigvuldig je de getallen 20 en 22, dat wordt 440, en deelt dit door het verschil van dezelfde getallen, dat is 2, met als resultaat 220, en dat aantal passen zal de hoogte van de heuvel zijn. (Naar Drake, 1978.)
Waarom levert deze berekening het correcte antwoord op?
In de tekening (***zie figuur 5b***) zijn weer 100 denkbeeldige passen vanaf E getekend. Afgelezen zijn de waarden p (bij C) en q (bij E) die beide horen bij de denkbeeldige 100 passen vanaf C en vanaf E. De te meten hoogte is h en de onbekende afstand vanaf P naar H is x.
In onze notatie ziet de berekening er als volgt uit.
Uit de gelijkvormigheid van de driehoek EHA en EPR volgt dat $\frac{h}{q} = \frac{100+x}{100} = 1 + \frac{x}{100}$ en uit de gelijkvormigheid van de driehoeken CHA en CES dat $\frac{h}{p} = \frac{200+x}{100} = 2 + \frac{x}{100}$.
Eliminatie van $\frac{x}{100}$ levert: $\frac{h}{p} - \frac{h}{q} = 1$ of: $h = \frac{pq}{q-p}$.

De historische realiteit

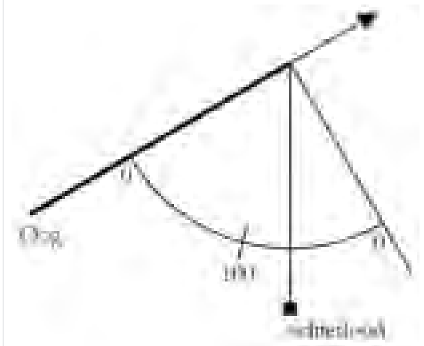
Rond 1880 was het gebruik van het Instrument bij militaire toepassingen vrijwel uitgestorven en vervangen door betere rekentoestellen (Tomash et al.).
Er zijn ook weinig exemplaren van het Instrument overgebleven. Daaruit zou je de conclusie kunnen trekken dat dit misschien toch niet zo'n handig apparaat was en dat er betere technische oplossingen waren. Maar misschien zijn alleen de ongebruikte exemplaren overgebleven en zijn de andere door veelvuldig gebruik verloren gegaan in de strijd. Het blijft gissen.
De bovenstaande tekst suggereert dat de wiskundige afleidingen van Galileï zelf afkomstig zijn. Zo is het zeker niet bedoeld. Galileï gaf geen enkele toelichting in zijn handleiding. Het bovenstaande is niet meer en niet minder dan een hedendaagse reconstructie van de wiskunde achter het Instrument. Daarbij is gebruik gemaakt van zo eenvoudig mogelijke wiskunde die zeker in de tijd van Galileï bekend was. Dat maakt de handleiding ook zo geschikt voor een praktische opdracht. De uitdaging zit erin dat leerlingen met voor hen beschikbare wiskundige middelen zien te achterhalen waarom Galileï het instrument op deze manier in elkaar heeft gezet en waarom zijn procedures tot het juiste antwoord leiden. Bovendien maken ze zo actief kennis met een stukje geschiedenis van de wiskunde. De parallel met de Grafische Rekenmachine als dom rekentuig is hierbij wellicht een mooie hedendaagse instap en kan zo bijdragen aan het besef dat een knoppencursus alleen geen inzicht in wiskunde kan opleveren.



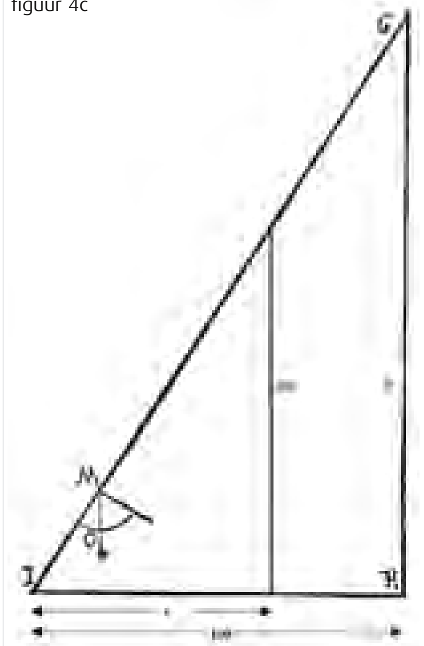
figuur 5a



figuur 5b



figuur 4c



figuur 4d

Literatuur

- S. Drake (1978): *Operations of the Geometric and Military Compass.* Washington DC: Smithsonian Institution Press.
- E. Tomash, M.R.Williams (2003): *The Sector, its history, scales, and uses.* In: *IEEE Annals of the History of Computing*, Vol. 25, No.1; pp. 34-47.

Over de auteur

Sieb Kemme houdt zich de laatste jaren vooral bezig met het ontwikkelen van lesmateriaal voor het wiskundeonderwijs en is sinds augustus 2007 projectleider van het cTWO-team.
E-mailadres: *skemme@educadbv.nl*

Hoeveel is oneindig?

[Marcel de Jeu]

Er zijn oneindig veel gehele getallen en ook oneindig veel reële getallen. Betekent dit nu dat er evenveel gehele getallen als reële getallen zijn? Of is er misschien toch een verschil tussen beide 'aantallen'? Een cursus tellen voor gevorderden.

Inleiding

Er zijn verschillende soorten getallen op de getallenrechte $\mathbb{R}$. De eenvoudigste zijn de *gehele* getallen, zoals 0; 30; 3; 2007; 81 en -23571113. Deze zijn alle een oplossing van een vergelijking van de vorm $x + a_0 = 0$ met a_0 geheel. Zo is 81 (uiteraard) de oplossing van de vergelijking $x - 81 = 0$. Net iets ingewikkelder zijn de breuken, zoals $\frac{22}{7}$; $\frac{355}{113}$; 3,14 en -3,14159265. De breuken zijn alle een oplossing van een vergelijking van de vorm $a_1x + a_0 = 0$ met a_1, a_0 geheel. Zo is $\frac{355}{113}$ de oplossing van $113x - 355 = 0$. Algemener heet een getal *algebraïsch* als het een oplossing is van een polynomiale vergelijking $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 = 0$ met alle coëfficiënten geheel. Als een getal niet algebraïsch is, dan heet het *transcendent*. Gehele getallen en breuken zijn algebraïsch, net als oplossingen van vierkantsvergelijkingen met gehele coëfficiënten. Het getal $\sqrt[3]{8+\frac{1}{7}\sqrt[5]{3}}$ is eveneens algebraïsch, want het is een oplossing van:

$$16807x^{15} - 672280x^{12} + 10756480x^9 + \\ -86051840x^6 + 344207360x^3 + \\ -550731773 = 0$$

Wanneer je, uitgaande van de gehele getallen, nieuwe getallen gaat construeren en daarbij uitsluitend gebruik maakt van optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, delen en het trekken van n-de machts wortels, dan is zo'n nieuw geconstrueerd getal, zoals bijvoorbeeld $\sqrt[3]{8+\frac{1}{7}\sqrt[5]{3}}$, altijd algebraïsch. Dit zorgt ervoor dat er onder de getallen die in de 'dagelijkse rekenkunde' voorkomen, erg veel algebraïsche getallen zijn.
Toch bestaan transcendente getallen wel degelijk. Voor het getal e bewees Hermite in 1873 dat het transcendent is en Lindemann toonde in 1882 de transcendentie van π aan. Die bewijzen zijn niet zo eenvoudig. Het is in het algemeen erg lastig om vast te stellen of een gegeven getal transcendent is en daarom is het slechts van weinig getallen bekend dat ze transcendent zijn. Zelfs bij voor de hand liggende kandidaat transcendente getallen als π^e is de vraag open. Het is echter veel gemakkelijker om te laten zien dat transcendente getallen *bestaan*, in overvloed zelfs. Zoals we hieronder zullen zien is dat gewoon een kwestie van tellen!

Tellen door koppelen

Je kunt op meerdere manieren de grootte van twee verzamelingen met elkaar vergelijken. Laten we eenvoudig beginnen en naar de twee verzamelingen A = {*aap*, *noot*, *Mies*} en B = {*Pythagoras*, *Stevin*, *Archimedes*} kijken. Zitten er evenveel elementen in A als in B? Het antwoord is uiteraard bevestigend, want er zitten 3 elementen in beide verzamelingen. Er is echter ook een andere motivatie van het antwoord 'evenveel' mogelijk: beide verzamelingen bevatten evenveel elementen omdat je een koppeling tussen de verzamelingen kunt aanbrengen. Je kunt bijvoorbeeld *noot* met *Stevin* laten corresponderen, *Mies* met *Pythagoras* en *aap* met *Archimedes*.
Hierbij tel je niet tot drie, maar zonder dat te doen maakt het argument toch duidelijk dat beide verzamelingen evenveel elementen bevatten.
Hoe zit het nu met de verzamelingen A = {0, 1, 2, 3, …} en B = {1, 2, 3, 4, …}? Zijn die even groot? Gewoon tellen werkt hier niet meer, want beide verzamelingen bevatten oneindig veel elementen. Met het andere type argument kun je echter nog steeds beargumenteren dat ze evenveel elementen hebben door concreet een één-op-één koppeling aan te geven: laat 0 uit A corresponderen met 1 uit B, 1 uit A met 2 uit B, 2 uit A met 3 uit B, enz. Dit maakt duidelijk dat, hoewel het lijkt alsof A net één element meer heeft dan B, beide verzamelingen wel degelijk even groot zijn.
Deze manier om over 'aantallen' en de grootte van verzamelingen na te denken is ingevoerd door Georg Cantor (1845-1918), de grondlegger van de verzamelingstheorie.
In de definitie van Cantor hebben twee verzamelingen A en B *dezelfde kardinaliteit*, dat wil zeggen evenveel elementen, als ze één-op-één te koppelen zijn. Voor eindige verzamelingen betekent dit uiteraard gewoon dat ze hetzelfde aantal elementen hebben, maar er is winst behaald omdat met deze definitie nu ook oneindige verza-



Georg Cantor,
1845-1918

melingen met elkaar vergeleken kunnen worden. Men noteert wel $|A|$ voor alle verzamelingen die dezelfde kardinaliteit hebben als A en $|A|$ heet dan een *kardinaalgetal*. Volgens Van Dale zijn de 'kardinale getallen' de hoofdtelwoorden, wat het gebruik van die terminologie bij het tellen van eventueel ook oneindige verzamelingen wel begrijpelijk maakt. Met deze notatie staat het kardinaalgetal |{aap, noot, Mies}| nu voor alle verzamelingen waarvoor er een één-op-één koppeling met |{aap, noot, Mies}| bestaat, en dat is een alternatieve manier om 'het aantal drie' te benoemen. Uiteraard is |{*aap*, *noot*, *Mies*}| = |{1, 2, 3}|. Het kardinaalgetal |{1, 2, 3, …}| staat voor 'het aantal natuurlijke getallen' en men noteert wel $|\{1,2,3,\ldots\}| = \aleph_0$ [1]. Het kardinaalgetal $\aleph_0$ is het kleinste oneindige kardinaalgetal en als $|A| = \aleph_0$, dan heet A *aftelbaar oneindig*. Die benaming klopt precies, want als $|A| = \aleph_0$ dan is A volgens de definitie dus één-op-één te koppelen met {1, 2, 3, …} en zo'n koppeling is niets anders dan een aftelling of nummering van de oneindig veel elementen van A.

Meer reële dan natuurlijke getallen

Voor de kardinaliteit van de reële getallen (het continuüm) schrijft men gewoonlijk $|\mathbb{R}| = \mathfrak{c}$ (een Duitse 'c'). Is misschien $|\{1,2,3,\ldots\}| = \aleph_0 = \mathfrak{c} = |\mathbb{R}|$? Anders gezegd: zijn er misschien evenveel reële getallen als natuurlijke getallen? Het inzicht dat dit *niet* zo is, vormde één van de eerste concrete successen in Cantors theorie. Het bewijs is verrassend simpel en wordt gegeven vanuit het ongerijmde, als volgt.
Stel dat de kardinaliteit van de natuurlijke getallen dezelfde is als die van de reële getallen en laat dan r_1, r_2, r_3, … een nummering van de reële getallen zijn die de één-op-één koppeling tot stand brengt. Beschouw dan het getal r met als decimale ontwikkeling $r = 0,c_1c_2c_3\ldots$, waarbij:

$$c_n = \begin{cases} 1, \text{ als de } n\text{-de decimaal van } r_n \text{ een 0 is} \\ 0, \text{ als de } n\text{-de decimaal van } r_n \text{ géén 0 is} \end{cases}$$

Per constructie is r ongelijk aan ieder van de getallen r_n, want de n-de decimaal van r verschilt van die van r_n. Maar het reële getal r moet toch ook ergens als een of andere r_n in de veronderstelde nummering staan en dus is r blijkbaar ongelijk aan zichzelf. Dit is een tegenspraak en zo'n nummering kan dus niet bestaan: $\aleph_0 \neq \mathfrak{c}$. Met andere woorden: er zijn echt meer reële dan natuurlijke getallen.

Altijd minder, evenveel of meer

We hebben nu gezien wat het betekent wanneer twee willekeurige verzamelingen even groot zijn. Bij eindige verzamelingen kunnen we altijd aangeven of de ene kleiner is dan de andere of dat ze even groot zijn. Voor algemene verzamelingen kan dit ook. Meer precies kan men het volgende aantonen: als $|A|$ en $|B|$ kardinaalgetallen zijn, dan óf wel laat A zich één-op-één koppelen met een deelverzameling van B maar niet met heel B, óf wel laat A zich één-op-één koppelen met heel B, óf wel laat B zich één-op-één koppelen met een deelverzameling van A maar niet met heel A.
Men noteert respectievelijk $|A| < |B|$, $|A| = |B|$ en $|A| > |B|$. Je kunt de kardinaliteit van twee verzamelingen dus altijd vergelijken, ook die van oneindige verzamelingen. Er bestaat zelfs een rekenkunde van kardinaalgetallen, waarbinnen men bijvoorbeeld bewijst dat $\mathfrak{c}^2 = \mathfrak{c}$; dat wil zeggen dat er evenveel punten in het vlak liggen als op de reële rechte.

Meer over aftelbaarheid

We gaan nu toewerken naar de algebraïsche en transcendente getallen uit de inleiding. Een belangrijke eerste stap hierbij is de observatie dat het verenigen van aftelbaar veel verzamelingen, die ieder ten hoogste aftelbaar oneindig (dat wil zeggen eindig of aftelbaar oneindig zijn), weer een ten hoogste aftelbaar oneindige verzameling oplevert. Dit is gemakkelijk in te zien. Als de (eventueel eindige) verzamelingen:

$$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots\}$$
$$B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, \ldots\}$$
$$C = \{c_1, c_2, c_3, c_4, \ldots\}$$
$$D = \{d_1, d_2, d_3, d_4, \ldots\}$$

zijn, zet dan de elementen als volgt neer (waarbij sommige rijen eindig kunnen zijn als de betreffende verzameling dat is):

$$\begin{array}{lllllll} A & & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \ldots \\ B & & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \ldots \\ C & & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & \ldots \\ D & & d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

en tel dan de vereniging af langs achtereenvolgende diagonalen die schuin omhoog lopen:

$$\begin{array}{lllllll} A & & & & & & \ldots \\ B & & & & & & \ldots \\ C & & & & & & \ldots \\ D & & & & & & \ldots \\ \ldots & & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

De eerste diagonaal die we in deze aftelling afhandelen, bestaat alleen uit a_1, de tweede uit b_1 en a_2, de derde uit c_1, b_2 en a_3, enz. Herhalingen van elementen die bij de aftelling al eerder zijn voorgekomen (dat wil zeggen elementen die in meerdere verzamelingen zitten), slaan we gewoon over, en als er op een plek niets staat omdat de betreffende verzameling eindig was, dan slaan we die plek ook gewoon over. Dit maakt duidelijk dat de vereniging eindig of anders aftelbaar oneindig is.
We gaan dit nu gebruiken bij het bepalen van de kardinaliteit van de algebraïsche getallen.
Merk allereerst op dat er aftelbaar oneindig veel vergelijkingen $a_1x + a_0 = 0$ van graad 1 met gehele coëfficiënten zijn. Immers, voor a_1 zijn er aftelbaar veel keuzes en bij gegeven a_1 zijn er weer aftelbaar veel keuzes voor a_0. Volgens bovenstaand resultaat zijn er dus inderdaad aftelbaar veel vergelijkingen van graad 1 met gehele coëfficiënten.
Voor een vergelijking $a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ van graad 2 met gehele coëfficiënten zijn er voor a_2 aftelbaar veel keuzes en bij gegeven a_2 zijn er dan weer aftelbaar veel (zoals we inmiddels weten) keuzes voor het stuk $a_1x + a_0$. Ook voor graad 2 zijn er dus aftelbaar veel vergelijkingen met gehele coëfficiënten en door dit argument te herhalen zien we dat dit voor iedere graad zo is. Omdat het aantal graden aftelbaar is, zijn er dus, alweer volgens bovenstaand resultaat, aftelbaar veel polynomiale vergelijkingen met gehele coëfficiënten. Ieder van die aftelbaar veel vergelijkingen heeft eindig veel nulpunten en een laatste toepassing van het resultaat laat zien dat er in totaal dus aftelbaar oneindig veel nulpunten van vergelijkingen met gehele coëfficiënten zijn. Met andere woorden: er zijn aftelbaar oneindig veel algebraïsche getallen.
Maar omdat we inmiddels ook weten dat de reële getallen *niet* aftelbaar oneindig zijn, kunnen de algebraïsche getallen dus nooit samenvallen met de reële getallen. Onze eindconclusie, gebaseerd op niet veel meer dan wat geavanceerd tellen, is dus dat er transcendente getallen moeten bestaan. Het is in feite zelfs zo dat, wanneer je aselect een reëel getal uit het interval [0; 1] trekt, de kans 1 is dat je een transcendent getal trekt. De dagelijkse praktijk waarin de algebraische getallen de overhand hebben, is dus nogal bedrieglijk: in feite zijn bijna alle getallen transcendent.

Er is altijd meer

We zagen hierboven al dat $\mathbb{R}$ echt groter is dan {1, 2, 3, …}. Zijn er nu verzamelingen die weer groter zijn dan $\mathbb{R}$? Is er misschien een 'grootste' verzameling met 'ultiem oneindig veel' elementen?
Om hier een idee over te krijgen nemen we eerst maar eens een eindige verzameling, bijvoorbeeld A = {*Hans*, *de*, *Rijk*} [2] en we kijken naar alle mogelijke deelverzamelingen hiervan:

∅, {*Hans*}, {*de*}, {*Rijk*}, {*Hans*, *de*}, {*Hans*, *Rijk*}, {*de*, *Rijk*} en {*Hans*, *de*, *Rijk*}

In totaal zijn dit 8 deelverzamelingen en dat is meer dan de 3 waarmee we begonnen. Dit is altijd zo: als A een eindige verzameling is met n elementen, dan zijn er 2^n mogelijke deelverzamelingen van A en altijd is $2^n > n$. Met andere woorden, het aantal deelverzamelingen van een eindige verzameling A is altijd groter dan het aantal elementen van A.
Cantor merkte al op dat dit ook voor oneindige verzamelingen geldt. Meer precies: laat A een verzameling zijn en laat *Deelverz*(A) de collectie van alle deelverzamelingen van A zijn, de zogenoemde *machtsverzameling* van A.
Dan is $|Deelverz(A)| > |A|$.
Dit impliceert dat er geen grootste verzameling is: de collectie van alle deelverzamelingen van die verzameling zou immers nog groter zijn. Het bewijs van dit resultaat is niet eens zo lastig - al vergt het wat logische hersengymnastiek - en gaat als volgt.

Het is allereerst duidelijk dat $|A| \leq |Deelverz(A)|$, kijk maar naar de afbeelding die $a \in A$ [3] naar $\{a\} \in Deelverz(A)$ stuurt. Als we dus nog kunnen uitsluiten dat $|A| = |Deelverz(A)|$ is, dan zijn we klaar. Dit tonen we aan uit het ongerijmde, als volgt.
- Stel dat $|A| = |Deelverz(A)|$. Dan is er dus een één-op-één koppeling:
$f: A \rightarrow Deelverz(A)$
Laat $A_0 = \{a \in A \mid a \notin f(a)\}$. Dit is een deelverzameling van A, dus dan moet A_0 gelijk zijn aan $f(a_0)$ voor een of andere $a_0 \in A$. Als $a_0 \in A_0$, dan moet volgens de definiërende eigenschap van de elementen van A_0 gelden dat $a_0 \notin f(a_0)$. Maar $f(a_0) = A_0$, dus dan geldt tegelijkertijd dat $a_0 \in A_0$ en $a_0 \notin A_0$ en dat kan niet. Blijkbaar is $a_0 \notin A_0$. Maar omdat $A_0 = f(a_0)$ is, is dan dus $a_0 \notin f(a_0)$, zodat a_0 voldoet aan de definiërende eigenschap van de elementen van A_0. Dus is $a_0 \in A_0$.
Ook in dit geval volgt dus dat tegelijkertijd zowel $a_0 \notin A_0$ als $a_0 \in A_0$ geldt, en dat is alweer een tegenspraak.
Maar de mogelijkheden zijn nu uitgeput: van $a_0 \in A_0$ en $a_0 \notin A_0$ moet toch één van beide gelden en, nu we hebben vastgesteld dat beide logisch onmogelijk zijn, moeten we concluderen dat ons uitgangspunt foutief was. Blijkbaar kan het inderdaad niet gelden dat $|A| = |Deelverz(A)|$ en dat is wat we wilden laten zien.
Men kan bewijzen dat $|Deelverz(\{1,2,3,\ldots\})| = \mathfrak{c} = |\mathbb{R}|$; dat wil zeggen dat er evenveel reële getallen als deelverzamelingen van de natuurlijke getallen zijn. Dit resultaat is opgenomen in de volgende oneindige rij van kardinaalgetallen, waarin ieder groter is dan zijn voorgangers:

$$
\begin{aligned}
|\varnothing| < |\{1\}| < |\{1,2\}| < |\{1,2,3\}| < |\{1,2,3,4\}| < \ldots \\
< |\{1,2,3,\ldots\}| = \aleph_0 \\
< |Deelverz(\{1,2,3,\ldots\})| = |\mathbb{R}| = \mathfrak{c} \\
< |Deelverz(\mathbb{R})| \\
< |Deelverz(Deelverz(\mathbb{R}))| \\
< |Deelverz(Deelverz(Deelverz(\mathbb{R})))| \\
< \ldots
\end{aligned}
$$

De eerste regel is niets anders dan een alternatieve weergave van de getallen 0, 1, 2, 3, …
Er is veel aandacht besteed aan de vraag of er nog een kardinaalgetal tussen $\aleph_0$ en $\mathfrak{c}$ zou kunnen zijn: zijn de reële getallen na de natuurlijke getallen de eerstvolgende grotere verzameling, of zit daar nog iets tussen? Cantor dacht hier al over na en in 1900 nam Hilbert deze zogenoemde continuüm-hypothese op in zijn lijst met belangrijke problemen. Uiteindelijk is er vastgesteld dat het bestaan van zo'n tussenverzameling noch bewezen noch uitgesloten kan worden uitgaande van de gebruikelijke axioma's van de verzamelingstheorie. Dit soort vragen gaat over de verzamelingstheoretische fundamenten van de wiskunde en om er op een goede manier aan te werken is er eigenlijk een wat preciezere terminologie nodig dan hierboven is gebruikt.
Hoe dan ook, het is duidelijk dat de vraag 'Hoeveel is oneindig?' uit de titel geen echt antwoord heeft. In het lijstje hierboven staan vanaf de tweede regel oneindige verzamelingen aangegeven die steeds echt kleiner zijn dan hun opvolger: er zijn oneindig veel verschillende aantallen oneindig.

Noten

[1] Spreek uit: alef-nul. De 'alef' is de eerste letter van het Hebreeuwse alfabet.

[2] Dit artikel is een bewerking van een lezing op het Bruno Ernst Symposium dat op 30 maart 2007 door de Universiteit Leiden werd georganiseerd ter ere van de op dat moment 81-jarige Bruno Ernst (pseudoniem van Hans de Rijk). Weblink van het symposium: *www.strw.leidenuniv.nl/cms/web/2007/20070330/info.php3?wsid=4*

[3] Spreek uit: *a* is element van *A*.

Over de auteur
Marcel de Jeu is als universitair hoofddocent verbonden aan het Mathematisch Instituut van de Universiteit Leiden.
E-mailadres: *mdejeu@math.leidenuniv.nl*


Charlotte Vlek

Vraag de gemiddelde leerling in het voortgezet onderwijs een aantal uiterlijke kenmerken op te noemen van een wiskundige, en in het antwoord komen gegarandeerd de woorden baard, bril en sandalen voor. Vraag een gemiddelde volwassene wat hij of zij vroeger vond van wiskunde, en een antwoord in de trant van 'Ik was nooit heel goed met cijfertjes' zal een goede voorspelling zijn. Laten we eerlijk zijn, wiskunde is niet erg populair.

Nationale PR-medewerker wiskunde
In een poging dit negatieve beeld van wiskunde bij te stellen is al enige jaren geleden een gezamenlijk initiatief van het Wiskundig Genootschap, de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren en Kennislink gestart: het project *Nationale PR-medewerker Wiskunde* [1]. Dit project heeft mij een kans geboden zelf actief bezig te zijn met het verbeteren van de publieke opinie over wiskunde: sinds 1 oktober 2007 ben ik aangesteld als Nationale PR-medewerker Wiskunde. Voorlopig voor de termijn van een jaar ben ik hierin de opvolgster van Ionica Smeets, die deze functie van december 2004 tot mei 2007 heeft vervuld.
Een Nationale PR-medewerker Wiskunde heeft de algemene taak zich actief in te zetten voor de positieve beeldvorming over wiskunde en haar toepassingen. In de eerste plaats maakt dit het abstracte vak wiskunde minder onpersoonlijk. Daarnaast komt het in de praktijk neer op een projectmatige aanpak: daar waar mogelijk leemtes vallen in de voorlichting (voor scholieren) of communicatie (naar het algemene publiek) over wiskunde, werpt de PR-medewerker zich op. Ionica schreef onder andere artikelen voor Kennislink (*www.kennislink.nl*), en voorlopig is mij het project *Wiskunde in Perspectief* toegewezen.

‘Wiskunde, dat populaire vak’

WISKUNDE HEEFT GEWOON GOEDE PR NODIG

[Charlotte Vlek]

Wiskunde in Perspectief
Wiskunde in Perspectief begon ooit als onderdeel van het grotere Wiskids-project, dat als doel had het enthousiasme voor wiskunde te bevorderen bij jongeren van tien jaar en ouder. Het doel van Wiskunde in Perspectief was door middel van een website informatie te geven over de studie wiskunde, en met name over de beroepsmogelijkheden na de studie. Dit leverde een site op met een aantal interviews met wiskundigen in verschillende beroepen, en algemene informatie over de studiemogelijkheden. Inmiddels is deze inhoud verouderd, en is het mijn taak de site nieuw leven in te blazen.
Naast een nieuw uiterlijk zal Wiskunde in Perspectief (*www.wiskundeinperspectief.nl*) vooral uitgebreid worden met een groot aantal interviews met afgestudeerd wiskundigen. In plaats van te zeggen: ‘Met wiskunde kun je heel veel!’, kunnen bezoekers in één oogopslag zien hoe breed de mogelijkheden na een wiskundestudie zijn. Deze bezoekers zijn natuurlijk primair scholieren, maar de website zal ook een nuttig hulpmiddel vormen voor leraren, decanen en voorlichters van universiteiten en hogescholen.
Naast mijn werkzaamheden voor dit project zal ik de momenten aangrijpen waarop ik mensen kan laten zien hoe mooi ik mijn vak vind. Zo loop ik bijvoorbeeld rond op de Nationale Wiskunde Dagen, die al voorbij zullen zijn als dit artikel verschijnt. Concreet ben ik daar om Wiskunde in Perspectief toe te lichten, maar daarnaast hoop ik met veel bezoekers te kunnen praten over hun meningen en ideeën over de wiskunde en de heersende opvatting erover.

Uit ervaring wijs geworden
Het feit dat mij de kans geboden is mij in te zetten voor het algemene beeld van wiskunde, en dan nog wel in de vorm van beroepsperspectieven na een wiskundestudie, doet mij goed. Zelf heb ik tijdens mijn gehele studietijd (wiskunde aan de RuG, momenteel rond ik mijn laatste jaar af) veelvuldig pogingen gedaan om uit te leggen wat ik nu precies deed, en regelmatig heb ik mensen er maar moeilijk van kunnen overtuigen dat ik wiskunde écht leuk vind. Toch ben ik er zelf van overtuigd dat het een prachtvak is. Omdat ik het zo’n mooi vak vind en omdat ik dit ook graag uitdraag, heb ik drie jaar lang als bijbaantje voorlichting gegeven over de wiskundestudie, als lid van het *Wiskunde Promotieteam* van de Rijksuniversiteit Groningen, wellicht bekend bij docenten in de drie noordelijke provincies. Met een laptop en een beamer onder de arm bezochten we scholen in het noorden des lands, om te vertellen over wat er zo mooi is aan wiskunde. Helaas heb ik het inmiddels te druk om dat er ook nog bij te doen, maar de reacties van de leerlingen waren elke keer weer goud waard. Natuurlijk gingen ze niet allemaal direct wiskunde studeren, maar de leerling die na afloop bij me kwam en vol oprechte verbazing vroeg: ‘Kun je écht de wortel uit een negatief getal trekken?’ zal ik nooit vergeten.
Vanuit de wens om mijn enthousiasme over mijn vak aan anderen over te dragen ben ik na mijn bachelor (theoretische) wiskunde de master Bètacommunicatie gaan doen, met als mogelijke beroepskeuze bijvoorbeeld de wetenschapsjournalistiek. Toen de vacature voor Nationale PR-medewerker Wiskunde op mijn pad kwam, zag ik mijn kans schoon om over mijn vak te kunnen schrijven, vertellen en discussiëren.

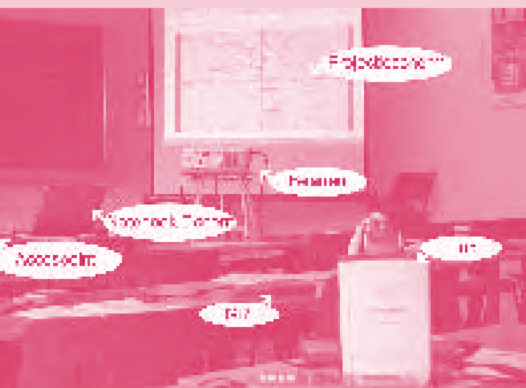
De toekomst
De komende tijd zal ik bezig zijn met het project Wiskunde in Perspectief, maar ik houd mijn ogen open voor andere activiteiten die het beeld over wiskunde kunnen verbeteren. Het bestrijden van de negatieve ideeën over wiskunde doe je echter niet zomaar in je eentje. Daarvoor zal ik de hulp nodig hebben van iedereen die weet hoe mooi het vak is, op wat voor manier dan ook. Opmerkingen, suggesties of vragen zijn dan ook zeer welkom via *prmedewerker@wiskgenoot.nl*.

Noot
[1] Zie voor meer informatie over het project *Nationale PR-medewerker Wiskunde* de website *www.wiskgenoot.nl/watbiedt/natpr.html*

Over de auteur
Charlotte Vlek is Nationale PR-medewerker Wiskunde, en studeert wiskunde aan de Rijksuniversiteit Groningen.
E-mailadres: *prmedewerker@wiskgenoot.nl*

De grafische rekenmachine en een draadloos netwerk in vmbo-3

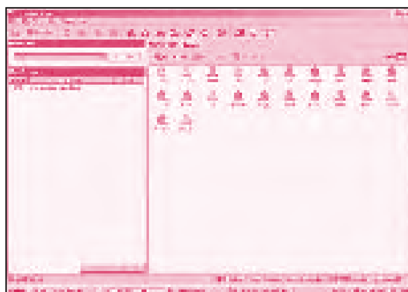
[Sybrand Jissink en Jos Tolboom]



figuur 1 Een overzicht van de klas. Aan het notebook van de docent is het accesspoint (links) verbonden en een beamer. De rekenmachines zijn verbonden met de hubs.

Nieuwe middelen

De grafische rekenmachine (hierna af te korten als GR) is een gewaardeerd én verguisd hulpmiddel bij de exacte vakken in het voortgezet onderwijs. De discussie over het gebruik ervan in het havo en vwo wordt nog steeds met veel energie gevoerd. In het vmbo maakt men nog geen gebruik van de GR.
Dit artikel beschrijft onderzoek naar een GR in het vmbo en bovendien het gebruik van een draadloos netwerk waarmee die GR's aan de computer van de docent kunnen worden gekoppeld. Mogelijke invoering van de GR in het vmbo kan, zeker in combinatie met een draadloos netwerk in de klas, een heleboel veranderingen met zich mee brengen in het vmbo. De rekenmachine in kwestie is de TI-73 Explorer. Met dit model is het aanmerkelijk eenvoudiger te leren werken dan met de GR's die in de Tweede Fase worden gebruikt. Hij is oorspronkelijk ontwikkeld voor leerlingen (11-14 jaar) van de 'middle school' in de V.S. (Casio heeft voor vmbo-leerlingen het model FX-7400G Plus.)
De TI-73 heeft minder functies en menuopties dan de TI-83/84 en is gebruiksvriendelijk. Voor het werken met de TI-73 heeft Texas Instruments (hierna af te korten als TI) het boekje 'Handige hulpjes' door Adri Knop laten ontwikkelen. In Nederland hebben enkele korte experimenten plaatsgevonden met het gebruik van de GR in het vmbo. Martin van Reeuwijk concludeerde dat de GR in het vmbo veel mogelijkheden biedt [1]. Uit het experiment van Peter van Vucht kwam naar voren dat er complicaties zouden ontstaan wanneer de GR te snel ingevoerd zou worden [2]. Hiermee refereert hij aan zijn experiment in een periode met veel lesuitval. Leerlingen die essentiële lessen misten, hadden moeite om met de GR te leren werken. Ruud Jongeling heeft de TI-73 bestudeerd voor het vmbo en vond de machine bruikbaarder dan gedacht, vooral voor het onderzoeken en ontdekken door leerlingen [3].
In dit onderzoek richten wij ons op de rekenmogelijkheden van de GR en de mogelijkheden om sneller en eenvoudiger grafieken te tekenen. Dit omdat wij denken dat hier de grootste kracht van de GR ligt.
Voor draadloze communicatie in de klas tussen docent en leerling heeft TI een netwerk ontwikkeld: TI-Navigator.
Hiermee is in Nederland al enige ervaring in de Tweede Fase (Tolboom, 2005; zie [4]), maar nog niet in het vmbo. Bij dit netwerk worden rekenmachines aan een *hub* gekoppeld, een klein bakje dat op een tafel wordt gelegd of bevestigd en dat draadloos communiceert met een *accesspoint* aan de computer van de docent. Op de computer van de docent wordt een beamer aangesloten; ***zie figuur 1***.



figuur 2 De docent heeft op zijn computer een klas aangemaakt en 16 van de 22 leerlingen zijn ingelogd.

Met behulp van de Navigator software heeft de docent meerdere mogelijkheden, zoals een schermafdruk maken van de rekenmachine van de leerlingen (zie figuur 3), het binnenhalen van data ingevoerd op de GR, het versturen en ontvangen van opgaven, en de leerlingen laten werken in een interactieve omgeving: het *activity center*. Op deze manier kan de docent niet alleen het gedrag van de leerlingen op de GR analyseren, maar ook leerlingen bijsturen tijdens hun werk, of de resultaten van een leerling als voorbeeld aan de klas te laten zien.

Het onderzoek

Dit artikel beschrijft een afstudeeronderzoek van de opleiding Wiskunde aan de Rijksuniversiteit Groningen. Het is uitgevoerd op twee scholen in de stad Groningen, namelijk het Röling College, afdeling Mondriaan, en het Zernike College. De docenten op deze scholen waren respectievelijk Peter van Rijn en Hidzer de Vries. Er is een lessenreeks geweest van zes tot acht lessen in drie vmbo-3 klassen: één op het Mondriaan (kaderberoepsgerichte leerweg) en twee op het Zernike College (theoretische leerweg). Deze lessenreeksen vonden plaats in april en mei 2007. In de klassen zaten tussen de 18 en 28 leerlingen. De lessenreeksen zijn afgesloten met een toets.
Het onderzoek naar de GR richtte zich voornamelijk op de leerling als individu, en het onderzoek naar het draadloos netwerk richtte zich op de klas als geheel. In beide gevallen is er gekeken:
- hoe goed en snel leerling en docent met de hulpmiddelen konden leren omgaan,
- of er in de lessen geleerd werd op een manier die anders niet mogelijk zou zijn.

Materiaal

Voor het onderzoek is lesmateriaal ontwikkeld dat gebaseerd is op *Moderne wiskunde*



voor vmbo kader 3, deel B, editie 8, hoofdstuk 12: Grafieken. In dit hoofdstuk komen allerlei grafieken aan de orde. Behalve expliciete aandacht voor het assenstelsel besteedt het hoofdstuk ook aandacht aan som- en verschilgrafiek bij twee gegeven functies. Het ontwikkelde materiaal is niet alleen voor de kaderberoepsklas gebruikt, maar ook voor de TL-klassen. Dit lesmateriaal was gemaakt voor het werken met de GR.
Na de lessenreeks op de eerste school is het boekje herzien voor de tweede lessenreeks. Geprobeerd is om de opgaven een klein beetje moeilijker te maken dan het originele lesmateriaal. In de 'oude situatie' beschikten de leerlingen immers niet over een GR. Sommige opgaven zouden met de GR te eenvoudig zijn geworden. Er wordt iets dieper op de stof in gegaan en er zijn opgaven waarbij de leerling moeilijker berekeningen moet maken. Een voorbeeld hiervan is een opgave over de inhoud van een bouwwerk bestaande uit een balk en een cilinder met variabele hoogte *x*. De leerlingen dienen de formules voor de inhoud van de balk, de cilinder en van het gehele bouwwerk in te voeren in de GR. Het laatste onderdeel van de opgave was een verdieping van het origineel: de leerling diende met behulp van de GR de inhoud van het bouwwerk te berekenen voor een veel grotere waarde van *x*.
Daarnaast hebben we digitaal materiaal ontwikkeld voor het *activity center* en opgaven die de docent verstuurt naar de leerlingen. Bij de software van Navigator zit een speciaal programma voor het ontwerpen van opgaven die de docent naar de GR's kan sturen. Tot slot hebben we een toets ontwikkeld waarbij de leerlingen de GR mochten gebruiken.
Momenteel is TI op vijf verschillende scholen bezig met een nieuwe pilot naar het gebruik van Navigator. Voor dit onderzoek heeft Mieke Abels van het Freudenthal Instituut nieuw materiaal ontwikkeld [5].

Resultaten
Tijdens het onderzoek zijn er veel en veelsoortige data verzameld: behaalde cijfers, uitgeschreven observaties, video-observaties, interviews en enquêtes. De cijfers op de toets zijn in alle drie klassen goed te noemen: klassengemiddeldes tussen de 7,3 en de 7,7. Hierbij zaten enkele tienen en als laagste cijfer een 3. De docenten verklaarden hierover heel tevreden te zijn.
De verkregen resultaten en constateringen aan de hand van de observaties tijdens het lesgeven zelf lopen uiteen van zeer positief tot negatief. Vanaf de eerste les is meteen duidelijk geworden dat leerlingen elkaar fel en soms ongenuanceerd corrigeren, doordat ze op het projectiescherm kunnen zien wat een medeleerling doet op de GR.
Het klassikaal corrigeren door leerlingen gaf in de meeste gevallen wel direct een goed beeld over hoe een opgave aangepakt had moeten worden, zonder dat een docent in actie hoefde te komen. De docent kan er overigens voor kiezen de namen van de leerlingen al dan niet in beeld te laten verschijnen. Ook zijn er meerdere situaties geweest waarin de docent het goede antwoord van een leerling kon gebruiken als voorbeeld voor de overige leerlingen. Tevens kreeg de docent beter inzicht in de activiteiten van de leerlingen en bleek het goed mogelijk een leerling die een foutje had gemaakt bij te sturen.
De leerlingen waren gemotiveerd in de les: hun werk deed er toe!
Deze positieve resultaten zijn geconstateerd in alle drie klassen. In de klas van het Mondriaan waren de resultaten iets minder positief, maar ook hier kwam positieve feedback uit de enquête naar voren: 'ik zou graag vaker werken met dat navigator' en 'het is erg handig wat de GR allemaal niet kan berekenen.' (De leerling bleek met deze feitelijk negatieve opmerking precies het tegenovergestelde te bedoelen…)

Het configureren van het netwerk bleek een lastige klus. TI biedt hiervoor ondersteuning. In principe is het natuurlijk zo dat configuratie een eenmalige investering is. Het leren werken met Navigator is ook redelijk tijdrovend. Het systeem kent behoorlijk veel nuttige mogelijkheden, die de docent stuk voor stuk moet bestuderen en uitproberen. Uiteindelijk moet hij kiezen welke mogelijkheid hij wel of niet wil gebruiken. Voor datgene wat hij wél wil gebruiken, rijst dan de vraag: hoe?
Het prepareren van een klaslokaal voor een Navigator-les, ervan uitgaande dat het niet een vast, voor Navigator-lessen gereserveerd lokaal is, kost ongeveer tien minuten. De docent kan er voor kiezen om de leerlingen dit zelf te laten doen, maar ook dat kost elke les wat tijd. Het zelf maken van opgaven om naar de klas te sturen is niet moeilijk, maar eist toch enige tijd en uiteraard didactische handigheid. Wij zijn benieuwd hoe de educatieve uitgevers dit gaan oppakken.

Bij het maken van vragensets zijn meerdere antwoordtypen mogelijk. Behalve voor open vragen en multiple choice vragen kan een docent ook kiezen voor het laten invullen van een kort antwoord, zogenoemde *fill in the blank* opgaven. Deze laatste hebben een groot voordeel. Opgaven die via de GR zijn teruggestuurd naar of opgehaald door de docent, kunnen door de docent met *ClassAnalysis* automatisch worden geanalyseerd en daarna met een diashow klassikaal worden besproken. Als de docent bij het maken van de opgaven direct het antwoord invoert, is het mogelijk aan het einde van de les de resultaten van een gemaakte opgave of toets razendsnel te bespreken. Dit maakte behoorlijk veel indruk op de leerlingen. Een leerling heeft meteen een goed beeld of hij een opgave goed heeft gemaakt en hoe de rest van de klas het heeft gedaan. Met deze informatie kunnen leerlingen dus zelf een inschatting maken of zij op de goede weg zitten naar bijvoorbeeld een voldoende op de toets.
Bij het bespreken van de opgaven waren leerlingen zeer goed bij de les: het ging immers zichtbaar over hun werk.

Tijdens de lessen kwamen ook enkele minder positieve punten aan het licht.
Het is niet eenvoudig te wisselen tussen 'rekenmodus' en 'communicatiemodus' van de GR. Een opgave, verstuurd via het draadloze netwerk, die met een GR gemaakt moet worden, vergt nogal wat van een leerling. Op de GR zit geen *multitasking* besturingssysteem waarbij de leerling snel kan wisselen tussen 'rekenmodus' en 'communicatiemodus'. Een ander minpuntje is dat bij meerkeuzevragen het niet mogelijk is de verschillende keuzes op het scherm van de GR te laten verschijnen. Verder waren er af en toe wat technische problemen, bijvoorbeeld



figuur 3 De schermen van de leerlingen tijdens het werken aan de opdracht 'Bepaal met behulp van de GR het snijpunt van de grafieken van y = 12x + 3 en y = 4x + 21.'

communication errors. Vaak werden deze veroorzaakt doordat leerlingen een kabel eruit trokken, maar soms waren de errors ook onverklaarbaar.
Wat betreft het gebruik van de GR waren de leerlingen gemiddeld genomen positief. Ze konden er snel mee werken en zagen er de voordelen van in. De meeste leerlingen prefereerden het gebruik van een GR boven de gewone rekenmachine. Het lastigste vonden de leerlingen de window-instellingen. Het verdient aanbeveling daaraan uitgebreid aandacht te besteden, hetgeen ook is gedaan in beide klassen op het Zernike College. Het kiezen van een goede window-instelling komt in feite neer op 'schattend rekenen voor functieonderzoek'. Leerlingen hadden hier op grote schaal veel moeite mee.
Het gebruik van het draadloos netwerk ging soms wat moeizaam, maar er zijn mooie resultaten bereikt. Een groot voordeel is dat er via Navigator op eenvoudige en overzichtelijke manier inzicht wordt verkregen in de denkwijze van de leerlingen. Zo bleek bij de opgave over de som van $x + 5$ en $3x + 2$ dat een deel van de leerlingen als antwoord gaf: $4x + 5$. Een ander deel gaf: $3x + 7$. Duidelijk werd dus meteen dat niet alle leerlingen componentsgewijs optelden tot $4x + 7$; ***zie figuur 5***.

Wij zagen ook boeiende onderwijsleergesprekken op basis van de mogelijkheden van het interactieve onderdeel *activity center*. Leerlingen kunnen hierin gezamenlijk met de docent aan het werk. In het onderzoek is er gewerkt met ondermeer assenstelsels: leerlingen leerden wat de relatie is tussen de vier kwadranten en het positief of negatief zijn van de waarden van x en y. De opdracht aan de helft van de klas was om naar een punt te gaan met positieve x-coördinaat en een y-waarde die twee maal zo groot was als die x. De rest van de klas moest het zelfde doen, maar dan voor negatieve y. Vervolgens werd de lijn $y = 2x$ getekend en de leerlingen zagen direct of ze naar een correct of verkeerd punt waren 'gewandeld'.
Behalve actieve deelname van de leerlingen waren er nog meer positieve resultaten. Enkele leerlingen begrepen bijvoorbeeld voor het eerst het coördinatenstelsel. De docent kon snel en eenvoudig aan de hele klas duidelijk maken hoe een lijn van de vorm Y = aX + b er uit zag; ***zie figuur 6***.

Conclusies en aanbevelingen

Algemeen

De betrokken docenten vinden de TI-73 geschikt en TI-Navigator erg handig, maar wel een investering om mee te leren werken. Dit geldt vooral voor Navigator. Wanneer je in één klas voor meerdere hoofdstukken materiaal hebt, kan deze investering in onze ogen al uit. Wij adviseren dat iedere leerling zijn eigen GR heeft en dat de lessen met Navigator of in een vast lokaal plaatsvinden, of dat er een acceptabele mobiele oplossing wordt gekozen.
Al met al lijkt de tijd rijp voor het breder uitproberen van de GR (eventueel in combinatie met een draadloos netwerk) in het vmbo. Wanneer ook die experimenten uitwijzen dat de doelgroep rijp is voor het werken met deze hulpmiddelen, dan pleiten wij voor invoering. Hierbij zou het wiskundecurriculum van het vmbo tegelijk een inhoudelijke verdieping moeten ondergaan. De GR maakt het nu eenmaal mogelijk wiskundige vaardigheden te automatiseren - in dit onderzoek bijvoorbeeld op het gebied van onderzoek van lineaire functies. Jongeling schrijft hierover in [3; p. 158]:
'Het hoofdstuk over verbanden in de tweede klas is erg gericht op het construeren van grafieken. Heb je een GR, dan zou je bij zo'n hoofdstuk eigenlijk andere vragen moeten stellen: niet zozeer 'construeer de grafiek', maar 'wat betekent de grafiek', 'wat betekenen snijpunten', enz. De grafieken hoeven dan ook niet allemaal rechte lijnen te zijn.'
Door die automatisering ontstaat tijdswinst die voor curriculaire verdieping gebruikt moet worden. De kritiek die momenteel te horen is op het gebruik van de GR in de tweede fase, zou er mede mee te maken kunnen hebben dat die curriculaire verdieping er voor dat type onderwijs niet of onvoldoende is gekomen. Die mogelijke fout moet in het vmbo in ieder geval voorkomen worden.
Didactisch gezien zal de docent de lessen meer moeten richten op het werk van de leerlingen, dat door ClassAnalysis is samengevat en beoordeeld. Leerlingen hebben hierdoor een grotere verantwoordelijkheid in de lessen. De docent zal hen dus consequent opdrachten moeten geven (via LearningCheck), vragen moeten stellen (via QuickPoll) en in het verkennen van wiskundige begrippen moeten meenemen (via Activity Center), en hen op hun inbreng moeten aanspreken. Dat is een ingrijpende didactische wijziging, die niet zonder oefening en onderzoek kan worden gerealiseerd.



figuur 4 De docent kan zien dat Lennert een foutje heeft gemaakt bij de coördinaten van het derde punt.

Student	Student Response	Student Answer	Score
Answer Key:	4X+7	4X+7	1.00
[illegible]	4X+7	4X+7	1.00
[illegible]	4X+7	4X+7	1.00
MARIELLE	4X+7	4X+7	1.00
[illegible]	4X+5	4X+5	0.00
LARS	3X+7	3X+7	0.00
NIKITA	3X+7	3X+7	0.00
[illegible]	3X+7	3X+7	0.00
[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.00
[illegible]			0.00
[illegible]			0.00
[illegible]			0.00
25 Students			[illegible]

figuur 5 Via ClassAnalysis een overzicht van de antwoorden van een deel van de leerlingen bij de opgave: 'Wat is de som van x + 5 en 3x + 2?'

Met betrekking tot de TI-73

De TI-73 Explorer is een geschikte rekenmachine voor een vmbo-leerling om mee te werken binnen het onderzochte domein (grafieken). Het gebruik ervan is redelijk eenvoudig te leren en het lijkt er op dat het lastig meetbare leereffect wordt verhoogd: op de afsluitende toets werden goede cijfers behaald en de docenten waren erg tevreden over de leerlingprestaties in de lessen zelf. Bovendien vonden de vmbo-leerlingen die aan het onderzoek deelnamen, het gemiddeld leuker om te werken met een GR dan met een gewone rekenmachine. Mocht de GR binnen het vmbo worden geïntroduceerd, dan zou het verstandig zijn dit direct vanaf de eerste klas te doen, zodat leerlingen niet hoeven te leren werken met twee verschillende apparaten en zij er bovendien geen twee hoeven aan te schaffen.

Als de belangrijkste meerwaarde van de TI-73 boven een normale wetenschappelijke rekenmachine zien wij de ruimte om dieper op de wiskundige begrippen in te gaan doordat wiskundige vaardigheden minder tijd kosten. Bovendien vonden beide klassen het werken met de TI-73 motiverend. Wij zijn benieuwd of dat effect ook op de lange termijn (meer dan enkele maanden) blijvend is. Wij hebben geen tekenen gezien die er op duiden dat deze GR minder geschikt is voor de leerlingen in dit onderzoek (vmbo-3) dan de TI-8x of de Casio (C)FX serie voor Tweede Fase leerlingen: technisch gezien kregen de geobserveerde klassen het vrij eenvoudig onder de knie en werd er goed gewerkt met de GR's.

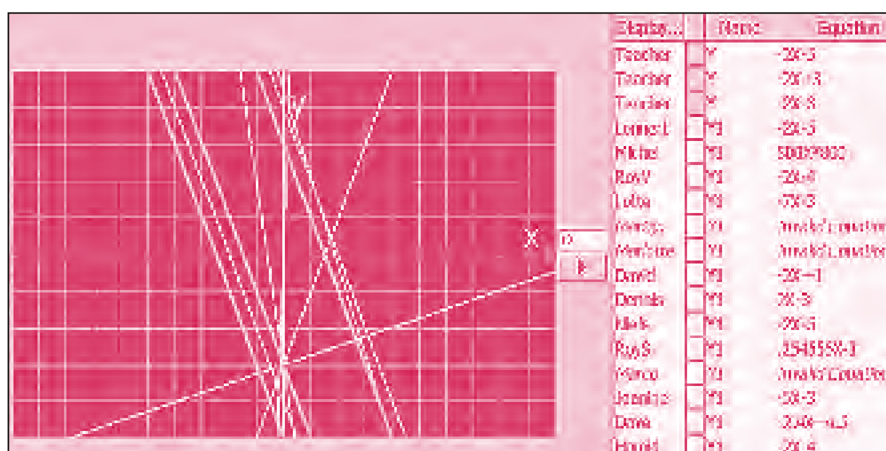
Met betrekking tot TI-Navigator

TI-Navigator is een mooi maar complex systeem. Het gebruik ervan levert voor een willekeurige docent nog veel problemen op en kent nog veel beperkingen. Echter, enkele technische verbeteringen en toevoegingen zouden kunnen leiden tot een revolutionair product dat voor elke docent tijdens de wiskundeles bijzonder handig is. Hierbij denken wij aan het eenvoudiger configureren van het draadloos netwerk, minder onverklaarbare 'errors' en meer mogelijkheden voor het werken met meerkeuzevragen. Geadviseerd wordt om het product verder te ontwikkelen. Het leren werken met Navigator vraagt een behoorlijke tijdsinvestering. Daarna is Navigator een zeer interessant hulpmiddel in de wiskundeles voor vmbo-3. Als de belangrijkste meerwaarde zien wij de betrokkenheid van de leerlingen bij de wiskundeles.

Wij hebben geen tekenen gezien die er op duiden dat werken met een draadloos netwerk minder geschikt is voor de leerlingen in dit onderzoek (vmbo-3) dan voor Tweede Fase leerlingen.

Hoewel de TL-klassen het werken met zowel de GR als het netwerk sneller oppikten dan de KB-klas, hebben wij ook in de KB-klassen geen onoverkomelijkheden geconstateerd.

figuur 6 Via het Activity Center laat de docent een aantal grafieken zien van lineaire functies met richtingscoëfficiënt -2. De leerlingen kregen de opdracht een lijn te maken die evenwijdig is aan drie groene lijnen van de docent.



Noten

[1] M. van Reeuwijk (2005): *De grafische rekenmachine in het Vmbo*. Utrecht: Freudenthal Instituut.

[2] P. van Vucht (2004): *Eindverslag project werken met de grafische rekenmachine TI 73 in TL 2*. Op: *www.sybrandjissink.nl/afstudeerwerk/inhoud.html* (website).

[3] R. Jongeling (2005): *Grafische rekenmachines in het Vmbo*. In: *Euclides* 80(4), pp. 156-158.

[4] J. Tolboom (2005): *Draadloos netwerk in de klas*. In: *Euclides* 81(3), pp. 108-112.

[5] Zie: *http://www.t3nederland.nl/* en klik dan op Cursusaanbod.

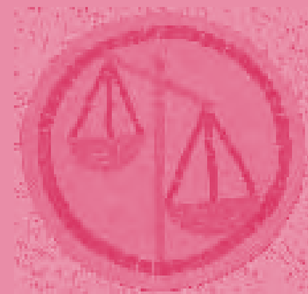
Informatie

Op de website van Sybrand Jissink (*www.sybrandjissink.nl/afstudeerwerk/*) zijn de scriptie, video's, foto's, Navigator-bestanden en de toets beschikbaar.

Over de auteurs

Sybrand Jissink is wiskundige en vanaf 1 december 2007 projectleider van Moderne wiskunde bij Wolters-Noordhoff BV.
E-mailadres: *info@sybrandjissink.nl*
URL: *www.sybrandjissink.nl/afstudeerwerk/*
Jos Tolboom is docent van de Educatie en Communicatie Master van de Faculteit Wiskunde en Natuurwetenschappen, Rijksuniversiteit Groningen.
E-mailadres: *j.l.j.tolboom@rug.nl*

Feiten en meningen



[Pauline Vos]

Universele wiskunde en didactische diversiteit

Tijd- en plaatsloos

Wiskunde is behoorlijk tijdloos, zoals we kunnen zien aan bijvoorbeeld de stelling van Pythagoras, die zowel in het verleden als in de toekomst staat als een huis. Natuurlijk komt er elke dag weer nieuwe wiskunde bij; wiskundige ontdekkers staan tenslotte niet stil. Zo formuleerden de Arabieren de cosinusregel:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$

Hiervan werd de stelling van Pythagoras een bijzonder geval, maar niet minder waar. Wiskunde is in veel verschillende situaties toepasbaar. In een christelijke maatschappij kun je de stelling van Pythagoras gebruiken voor het bepalen van de hoogte van de kerktoren. In een rotsachtig berglandschap kun je hem gebruiken voor het bepalen van de breedte van een onoverbrugbare kloof. Wiskunde is door de abstractie dus vergaand *plaats-onafhankelijk*.

Dit kun je trouwens ook zien aan de wiskundeboeken uit verre landen. Van de tekens, woorden of karakters snap je niets, maar de $a^2 = b^2 + c^2$ zie je overal (eventueel in een andere volgorde en met andere letters) en ook aan de figuur zie je dat het over Pythagoras gaat. Die figuren verschillen wel, afhankelijk van de aanpak die meer Euclidisch of meer algebraïsch is; zie ***figuur 1***.

Een kijkje in een buitenlands boek

Zo universeel als wiskunde is, zo universeel lijkt ook het wiskundeleerplan. Overal begint men met optellen en aftrekken, na een jaar of vijf komen de breuken langs en na nog eens vier jaar staan de parabolen op het programma. Overal op deze wereld leren leerlingen tussen de 12 en 14 jaar over verhoudingen, Pythagoras, π en de eerstegraads vergelijking.

Naast overeenkomsten zijn er natuurlijk veel verschillen in de leerplannen. In Nederland bijvoorbeeld doen we aan kijklijnen, terwijl ze in veel andere landen aan Venn-diagrammen doen. Maar wat vooral verschilt, dat is de aanpak. Wiskundedidactiek is allesbehalve universeel. Ik heb een Portugees schoolboek voor de brugklas. Het is een 'modern' schoolboek met kleurrijke plaatjes en met uitleg over het gebruik van de zakrekenmachine. Het gaat er bij de *verhoudingen* (enkelvoud: *proporção*, meervoud *proporções*) aldus aan toe:

> Een *verhouding* is een gelijkheid van twee breuken, bijvoorbeeld
> $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$ of $\frac{4}{2} = \frac{6}{3}$
> Zij gegeven de verhouding $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ met $b \neq 0$ en $d \neq 0$.
> Deze verhouding heeft vier termen.
> Dan is *a* de *eerste term, b* is de *tweede term*, *c* is de *derde term* en *d* is de *vierde term*.
> We zeggen:
> - de **uitersten** van een verhouding zijn de eerste en de vierde term (in het Portugees: *extremo*);
> - de middens van een verhouding zijn de tweede en de derde term (in het Portugees: *meio*);
> - de **antecedenten** van een verhouding zijn de eerste en de derde term;
> - de **consequenten** van een verhouding zijn de tweede en de vierde term.
>
> Nu gaan we de fundamentele eigenschap van verhoudingen onthouden:
> In een verhouding is het product van de middens gelijk aan het product van de uitersten.
> Regels van de verhoudingen:
> 1. In een verhouding is een midden gelijk aan het product van de uitersten gedeeld door het andere midden.
> 2. In een verhouding is een uiterste gelijk aan het product van de middens gedeeld door het andere uiterste.

Nogmaals: het betreft een schoolboek voor het zevende leerjaar, dat komt in Nederland overeen met de brugklas. Het is geen verouderd boek, maar een boek dat dagelijks in Portugese wiskundelessen wordt gebruikt. Mist u dergelijke passages in onze Nederlandse schoolboeken?

Typisch Nederlands

Uit internationaal onderzoek blijkt, dat er in Nederlandse wiskundelessen in de onderbouw uitzonderlijk veel contexten en uitzonderlijk weinig symbolen gebruikt worden. Dit zal niemand verbazen. Wat ook opvalt is dat er in Nederland nauwelijks samenvattende opmerkingen in een les voorkomen: in vergelijking tot andere landen zien we in Nederland nauwelijks dat de wiskundeleraar een overzicht van het geleerde geeft en ook de leerlingen maken geen samenvattingen. Verder valt op, dat Nederlandse wiskundelessen voor 99% op een schoolboek gebaseerd zijn. Dat is een extreem percentage: in veel landen baseren leraren zich slechts gedeeltelijk op een schoolboek (de rest verzinnen ze zelf), of ze gebruiken helemaal geen boek. In Nederland wordt ook relatief weinig klassikaal uitgelegd en is er relatief veel tijd voor zelfwerkzaamheid. Het gebruik van rekenmachines wordt in veel landen aan banden gelegd, en dan valt Nederland als uitschieter op omdat wij die apparaatjes bijna onbeperkt toestaan.

In veel landen is de leraar de centrale persoon in de klas en zijn er geen motivatie- of ordeproblemen. De leerlingen, in veel landen in schooluniform, doen volgzaam na wat er voor het bord is voorgedaan. Het vak wiskunde wordt daar ook vaak



figuur 1



'kaal' aangeboden en inductief opgebouwd. Dit betekent dat men vanuit wiskundige definities de stof aanlevert in de vorm van stellingen, zoals in het Portugese wiskundeboek. En in veel landen ligt de nadruk sterk op het uit-het-hoofd-leren van dergelijke stellingen.

Een kijkje in een buitenlandse klas

Ik wil u graag uitnodigen om te genieten van klassenscènes in andere landen. Dan kun je zien hoe divers de aanpak van wiskundeonderwijs kan zijn. Op mijn website [1] heb ik enkele korte filmpjes gezet. De wiskundeles in Hongkong is een voorbeeld van klassieke *drill*, waarin leerlingen moeten leren door nazeggen. In koor. Laat maar eens aan uw leerlingen zien, zodat ze weten wat hen te wachten staat als ze willen emigreren. Daarnaast zijn de beelden ook handig om je te realiseren wat de voorgeschiedenis van een buitenlandse leerling(e) kan zijn. Als ik naar dergelijke beelden kijk, dan krijg ik altijd veel waardering voor het Nederlandse onderwijs.
U kunt ook klikken naar een filmpje uit Japan. Hier zien we hoe de tweedeklassers een hoek in een figuur moeten bepalen door middel van redeneren. De docent geeft ruimte aan verschillende redeneringen, die alle tot hetzelfde correcte antwoord leiden. Ik vind het een mooi voorbeeld van hoe een docent de diversiteit in de klas kan gebruiken.
Van geheel andere aard is het filmpje uit Australië. Hierin geeft de wiskundeleraar een *dictee* aan zijn tweedeklassers. Achter elkaar volgen korte kennisvragen: 32 gedeeld door 4; 3 maal -9; geef de oppervlakteformule voor de cirkel; werk de haakjes uit van $(4x)^3$. In hoog tempo. Binnen vier minuten na aanvang van de les is hij klaar en hebben de hersens van de leerlingen flink gedraaid. Het filmpje sluit goed aan bij de oproep naar het verhogen van de parate kennis (zie de serie 'Parate kennis en algebra' van Anne van Streun in de vorige jaargang van Euclides). Zo kun je ook inspiratie opdoen in het buitenland.

Noot

[1] Zie *www.rug.nl/staff/f.p.vos/teaching*

Over de auteur

Pauline Vos was wiskundelerares en werkt nu aan de Rijksuniversiteit Groningen, waar zij onderzoek doet naar het wiskundeonderwijs.
E-mailadres: *f.p.vos@rug.nl*

Significante wiskunde

[Jeroen Spandaw]

Inleiding

Onlangs vroeg een zeer ervaren scheikundeleraar me hoe onnauwkeurigheid doorwerkt in logaritmen. Hij vertelde me dat daarover ieder jaar in de regionale examenbesprekingen wordt gebakkeleid. Het correctievoorschrift vermeldt slechts hoeveel cijfers een leerling meer of minder mag hebben dan het aantal dat 'verantwoord' is zonder dat dit tot puntenaftrek leidt. Hoe men bepaalt hoeveel cijfers 'verantwoord' zijn, daarover zwijgen CEVO en de schoolboeken in alle talen.
Het antwoord op de vraag van de scheikundeleraar is een eenvoudige toepassing van de afgeleide van de functie $f(x) = \log(x)$. Toch blijken maar weinig docenten dit te weten en de door mij bevraagde scheikundedocenten die deze regel wel kennen, beroepen zich op autoriteit in plaats van schoolwiskunde.
Deze kleine affaire illustreerde voor mij weer eens de kloof tussen wiskundigen en natuurwetenschappers. Veel wiskundigen hebben nooit geleerd hoe ze met onnauwkeurigheid moeten omgaan. In de discussies op het forum van de NVvW na het vwo-eindexamen wiskunde B van afgelopen jaar bleek bijvoorbeeld dat sommige wiskundeleraren menen dat een lamp op *exact* 2,5 meter hoogte kan hangen en dat je in deze context zinvol kunt en moet onderscheiden tussen $h < 2{,}5$ m en $h \leq 2{,}5$ m. Helaas delen ook enkele schrijvers van schoolboeken dergelijke misvattingen. Zo herinner ik me een opgave voor havo 4 (wiskunde A1!) waarin gevraagd werd of een bepaalde gewichtsklasse tomaten een open of een gesloten interval vormt…

Het ontbreken van *eenheden* bij wiskunde is een al even treurig thema. Eenheden kun je niet straffeloos negeren, zoals apothekers en NASA-ingenieurs weten. (In 1999 crashte een satelliet op Mars omdat ingenieurs hadden vergeten Engelse eenheden om te rekenen in SI-eenheden.) We moeten bij wiskunde dus niet het verkeerde voorbeeld geven. Bovendien is dimensieanalyse ('eenhedenalgebra') een buitengewoon effectieve toepassing van algebra in techniek en natuurwetenschappen! Je kunt bijvoorbeeld de formule voor de slingertijd $T = 2\pi\sqrt{(l / g)}$ op de factor 2π na 'raden' door naar de eenheden (beter: naar de dimensies) te kijken.
Bij wiskunde wordt leerlingen regelmatig gevraagd een zekere afstand 'in 1 decimaal nauwkeurig' te geven. Dit is een onzinnige vraag: er wordt verschil gemaakt tussen antwoorden als 2,54 cm en 25,4 mm en bovendien is '0,0 lichtjaar' vrijwel altijd een correct (maar pedant) antwoord. Je kunt beter naar een bepaald aantal significante cijfers vragen. Nog beter is het om leerlingen zelf te laten bepalen hoeveel significante cijfers verantwoord zijn en welke eenheid geschikt is. In de natuur- en scheikundelessen gebeurt dat zo, maar bij wiskunde 'mag' dat niet, want significantie hoort niet tot de examenstof! Op examens worden deze problemen omzeild door de grootheden dimensieloos te maken, bijvoorbeeld: 'Geef x in 1 decimaal nauwkeurig, waarbij x die-en-die afstand *in meter* is.'
Gelukkig kunnen onze natuurwetenschappelijke collega's ook nog wel eens iets van ons leren. Wiskundeleraren nemen, hoop ik, geen genoegen met *mededelen dat* een zekere vuistregel voor significante cijfers zus-en-zo luidt; zij willen *uitleggen waarom* dat zo is. Een dergelijke uitleg bevordert meteen het inzicht in de betrekkelijkheid van dergelijke regels, terwijl een beroep op autoriteit de suggestie van wetten van Meden en Perzen wekt.

In dit artikel herhalen we eerst het een en ander over meetfouten en significante cijfers. Vervolgens leiden we de bekende vuistregels voor optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen af en leggen het verband met absolute en relatieve fouten. Tot slot bekijken we hoe fouten doorwerken in machten en logaritmen.

Nauwkeurigheid en significante cijfers

Buiten de wiskunde wordt voortdurend met niet exact bekende grootten gewerkt. Iedere meting, op het tellen van betrekkelijk kleine aantallen na, is onnauwkeurig. *Toevallige fouten*, zoals afleesfouten, kunnen volgens de $\sqrt{n}$-wet verkleind worden door de meting te herhalen en het gemiddelde te berekenen. *Systematische fouten*, zoals ijkfouten, kunnen op deze manier niet worden bestreden. Bovendien zijn veel grootheden niet exact

gedefinieerd. Neem bijvoorbeeld de omtrek van de aarde. De evenaar meet 40 075 km, terwijl de omtrek over de polen 40 008 km bedraagt. Zelfs als we specificeren dat de tweede variant bedoeld is, is het nog maar de vraag of die omtrek niet van de lengtegraad afhangt. We kunnen natuurlijk bepaalde meridianen kiezen, maar wat doe je vervolgens met bergen? Enzovoorts. Uiteindelijk belanden we op atomair niveau en dan zien we dat vrijwel niets exact gedefinieerd is.
Op school wordt de (on-)nauwkeurigheid aangegeven door het aantal significante cijfers. In 1980 leerde ik in de vierde klas van het vwo uit *Natuurkunde op corpusculaire grondslag (deel 3V)* dat met l = 0,596 meter bedoeld wordt dat de werkelijke lengte l hoogstens 0,0005 meter hiervan afwijkt, dus:
0,5955 m $\leq l <$ 0,5965 m
Dit werd ook wel geschreven als:
l = (0,596 ± 0,0005) m
Tussen de regels door werd gesuggereerd dat je zeker wist dat de werkelijke lengte tussen de genoemde grenzen lag.
In werkelijkheid is de meetfout van een meting natuurlijk niet exact bekend, maar wordt deze zo goed mogelijk geschat. Het *Particle Physics Booklet* (gratis te verkrijgen bij CERN) geeft bijvoorbeeld voor de massa m_e van een elektron:
m_e = 9,109 389 7(54) × 10^{-31} kg
De toelichting luidt: *The 1-σ uncertainties in the last digits are given in parentheses after the values.* Met andere woorden: de natuurkundigen van CERN zijn voor 68% zeker dat de werkelijke massa van een elektron minder dan 0,000 005 4 × 10^{-31} kg afwijkt van de gegeven waarde. Een andere schrijfwijze is:
m_e = (9,109 389 7 ± 0,000 005 4) × 10^{-31} kg
In wetenschappelijke publicaties zie je ook vaak betrouwbaarheidsintervallen. Volgens de bekende vuistregel valt 95% binnen een marge van 2σ, dus het 95%-betrouwbaarheidsinterval is hier:
(9,109 390 ± 0,000 011) × 10^{-31} kg
Het systeem om de nauwkeurigheid aan te geven door middel van het aantal significante cijfers is dus vrij grof. In de eerste plaats is niet duidelijk wat precies bedoeld wordt. Je zou natuurlijk kunnen afspreken dat in het bovengenoemde voorbeeld l = 0,596 m de fout Δl = 0,0005 m correspondeert met de (geschatte) standaardafwijking. In de tweede plaats betekent één significant cijfer meer of minder een 10 keer zo kleine of grote fout. *Het aantal significante cijfers geeft dus niet meer dan een indicatie van de orde van grootte van de geschatte meetfout.* Het is goed om dit in het achterhoofd te houden, want in het vervolg wordt her en der meedogenloos vereenvoudigd en afgerond.

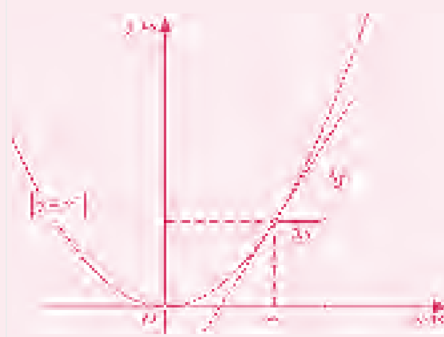
Enkele vuistregels

In het eerder genoemde *Natuurkunde op corpusculaire grondslag* wordt voorgerekend hoe fouten doorwerken in sommen, verschillen, producten en quotiënten. Bijvoorbeeld: 70,3 cm + 2,0 cm ligt tussen 70,25 cm + 1,95 cm = 72,2 cm en 70,35 cm + 2,05 cm = 72,4 cm. Er wordt vervolgens geconcludeerd dat de som het beste kan worden weergegeven als:
70,3 cm + 2,0 cm = 72,3 cm
Weliswaar kan de som meer dan 0,05 cm hiervan afwijken, maar
70,3 cm + 2,0 cm = 72 cm
zou een fout suggereren in de orde van grootte van 0,5 cm en dat zou echt te pessimistisch zijn. Een ander voorbeeld, 1,4 + 2,038 = 3,4 want de orde van grootte van de fout is 0,05. *Bij de som wordt dus het kleinste aantal significante decimalen aangehouden.* Hetzelfde geldt voor verschillen.
In mijn oude schoolboek worden ook producten behandeld door de twee grensgevallen door te rekenen. Zo ligt het product 5,6 cm × 3,4 cm tussen 5,55 cm × 3,35 cm = 18,5925 cm² en 5,65 cm × 3,45 cm = 19,4925 cm². De conclusie is dat 5,6 cm × 3,4 cm = 19 cm² de beste indicatie geeft van de onzekerheid. Vervolgens werd de vuistregel gegeven: *Bij producten wordt het kleinste aantal significante cijfers aangehouden.* Hetzelfde voor quotiënten.

Hierboven werden de vuistregels gemotiveerd door een paar rekenvoorbeelden, maar we kunnen de vuistregels ook algemeen 'afleiden'. We beginnen met sommen. De som van $x + \Delta x$ en $y + \Delta y$ is $z + \Delta z$ met $z = x + y$ en $\Delta z = \Delta x + \Delta y$. Hierbij kunnen de fouten ook negatief zijn. Voor de absolute fouten geldt dus:
$|\Delta(x + y)| \leq |\Delta x| + |\Delta y|$
Ook voor het verschil vinden we $|\Delta(x - y)| \leq |\Delta x| + |\Delta y|$. De fouten Δx en Δy kunnen elkaar gedeeltelijk opheffen. Als we de fout opvatten als standaardafwijking, dan vinden we $(\Delta z)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$ mits Δx en Δy onafhankelijk zijn. Leuk voor de statistiekles, maar nu voert dit allemaal te ver. Voor ons is het voldoende om te concluderen dat voor de orde van grootte in het algemeen geldt:
$|\Delta(x \pm y)| \approx |\Delta x| + |\Delta y|$
Bij optellen en aftrekken worden dus de absolute fouten opgeteld. Hieruit volgt weer de vuistregel over de significante decimalen.

De doorwerking van absolute fouten in producten is iets ingewikkelder:
$(x + \Delta x) \times (y + \Delta y) = xy + (x \cdot \Delta y + y \cdot \Delta x) + \Delta x \cdot \Delta y$
We nemen aan dat de fouten Δx en Δy zo klein zijn dat $\Delta x \cdot \Delta y$ verwaarloosbaar is ten opzichte van $x \cdot \Delta y + y \cdot \Delta x$. We vinden dan voor de fout in het product:
$\Delta(xy) \approx x \cdot \Delta y + y \cdot \Delta x$ (*)
(U herkent hierin natuurlijk de productregel voor differentiëren: als $f(t + \Delta t) = f(t) + \Delta f$ en $g(t + \Delta t) = g(t) + \Delta g$, dan geldt $\Delta(fg) \approx f \cdot \Delta g + g \cdot \Delta f$. Deel dit door Δt en laat vervolgens Δt naar 0 gaan.)
Als we de uitdrukking (*) delen door xy, vinden we: $\frac{\Delta(xy)}{xy} \approx \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y}$
We zien dus dat de *relatieve fout* van een product gelijk is aan de som van de relatieve fouten van de factoren. Opnieuw is het gebruikelijk om *absolute* waarden te nemen. We vinden dan $R(xy) \approx R(x) + R(y)$ waarbij R staat voor de absolute waarde van de relatieve fout. Voortaan noemen we dit gewoon de relatieve fout.

Voordat we het verband leggen met het aantal significante cijfers, bekijken we eerst nog even machten en quotiënten.
Als we in het bovenstaande $y = x$ kiezen,



vinden we $\Delta(x^2) \approx 2x \cdot \Delta x$. Kiezen we $y = x^2$, dan krijgen we $\Delta(x^3) \approx x \cdot \Delta(x^2) + x^2 \cdot \Delta x \approx 3x^2\Delta x$. In het algemeen vinden we:
$\Delta(x^n) \approx nx^{n-1}\Delta x$ (voor n = 1, 2, 3, …)
Dit hangt natuurlijk weer samen met de afgeleide van $f(x) = x^n$:
$\Delta(x^n) \approx f'(x)\, \Delta x$
Dit kunnen we ook toepassen voor negatieve of niet-gehele exponenten α:
$\Delta(x^\alpha) \approx \alpha x^{\alpha-1}\Delta x$
Delen we deze uitdrukking door x, dan

vinden we voor de relatieve fout:

$R(x^{\alpha}) \approx |\alpha| \cdot R(x)$

In het bijzonder vinden we dat $R(x^{-1}) \approx R(x)$.

Combineren we dit weer met de productregel, dan vinden we:

$R(\frac{y}{x}) \approx R(x) + R(y)$

Ook bij quotiënten moeten dus de relatieve fouten worden opgeteld.

De *absolute* fout hangt samen met het aantal significante *decimalen*, de *relatieve* fout hangt samen met het aantal significante *cijfers*.

Om dit laatste in te zien is het handig om de *wetenschappelijke notatie* te gebruiken. We schrijven een getal x dus als: $x = z \cdot 10^k$

We mogen daarbij aannemen dat voor de *mantisse* z geldt: $1 \leq |z| < 10$.

Natuurlijk hebben x en z evenveel significante cijfers. Het cruciale punt is dat x en z bovendien dezelfde relatieve fout hebben, want $\Delta x = \Delta z \cdot 10^k$ en dus: $\frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta z \cdot 10^k}{z \cdot 10^k} = \frac{\Delta z}{z}$

Stel nu dat x drie significante cijfers heeft. Dan geldt hetzelfde voor de mantisse z. Uit $1 \leq |z| < 10$ volgt dan dat z twee significante decimalen heeft en dus $|\Delta z| \approx 0{,}005$. Dit delen we vervolgens door $|z|$ en we vinden $0{,}0005 \leq R(z) \leq 0{,}005$. De relatieve fout van x is gelijk aan die van z, dus er geldt $0{,}0005 \leq R(x) \leq 0{,}005$. Bij m significante cijfers leidt dit argument tot $5 \times 10^{-m-1} \leq R(x) \leq 5 \times 10^{-m}$. De orde van grootte van de relatieve fout is dus 10^{-m}.

We kunnen nu de bovengenoemde vuistregel voor het aantal significante cijfers bij vermenigvuldigen afleiden.

Als x en y m respectievelijk n significante cijfers hebben, dan geldt $R(x) \approx 10^{-m}$ en $R(x) \approx 10^{-n}$. Dan geldt dus $R(xy) \approx 10^{-m} + 10^{-n} \approx 10^{-k}$, waarbij $k = \min(m, n)$. (Ook als $m = n$ heeft $10^{-m} + 10^{-n} = 2 \cdot 10^{-k}$ dezelfde orde van grootte als 10^{-k}.) We zien dus dat xy inderdaad k significante cijfers heeft.

Machten

Hoe werkt onzekerheid in x door in $y = 10^x$? Algemener, hoe werkt onzekerheid in x door in een functiewaarde $y = f(x)$? Hiervoor gebruiken we de afgeleide van f. Er geldt immers: $\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f'(x)$

We nemen daarbij natuurlijk aan dat de onzekerheid Δx 'klein' is. Dit passen we toe op de functie $f(x) = 10^x$:

$\Delta y \approx f'(x) \cdot \Delta x = \ln(10) \cdot 10^x \cdot \Delta x$

Vervolgens delen we door $y = 10^x$:

$R(y) \approx \ln(10) \cdot |\Delta x|$

Dus, de *relatieve fout in* $y = 10^x$ *is evenredig met de absolute fout in* x. Dit correspondeert met een verband tussen het aantal significante *cijfers* in y en het aantal significante *decimalen* in x.

Als x m significante decimalen heeft, dan geldt $|\Delta z| \approx 5 \times 10^{-m-1}$, dus $R(y) \approx \ln(10) \times 5 \times 10^{-m-1} \approx 10^{-m}$. Eerder hebben we al gezien dat dit laatste betekent dat y m significante *cijfers* heeft.

We hebben dus de volgende vuistregel afgeleid: *het aantal significante cijfers in* $y = 10^x$ *is gelijk aan het aantal significante decimalen in* x.

Voorbeeld 1

$x = 4{,}0012$ heeft vier significante decimalen, dus $y = 10^x = 10027{,}669\ldots$ heeft vier significante cijfers: $y = 1{,}003 \times 10^4$.

Voorbeeld 2

$x = 0{,}0012$ heeft weliswaar slechts twee significante cijfers, maar in onze terminologie zijn er vier significante decimalen. (Formuleringen als 'de vierde decimaal is de laatste significante decimaal' zijn zo omslachtig…). Dus opnieuw heeft $y = 10^x = 1{,}0027669\ldots$ vier significante cijfers: $y = 1{,}003$.

Als we de voorbeelden $10^{4{,}0012} = 1{,}003 \times 10^4$ en $10^{0{,}0012} = 1{,}003$ met elkaar vergelijken zien we weer overduidelijk dat in de exponent de cijfers voor de komma er niet toe doen bij de bepaling van het aantal significante cijfers van $y = 10^x$. Aan het tweede voorbeeld zien we dat we een exponent als $x = 1{,}2 \times 10^{-3}$ eerst moeten omschrijven naar $x = 0{,}0012$ om het correcte aantal significante decimalen te bepalen. In de schoolpraktijk zijn exponenten nooit extreem groot of klein en wordt voor de exponenten zelden de wetenschappelijke notatie gebruikt.

Voorbeeld 3

Als $x = -120{,}7$ is, dan $10^x = 0{,}2 \times 10^{-120}$, want $10^{-0{,}7} = 0{,}2$.

We hebben stilzwijgend aangenomen dat het aantal significante decimalen van x positief is, dus dat x überhaupt significante decimalen heeft! Als x bijvoorbeeld gelijk is aan 12 - dus twee significante cijfers en nul significante decimalen - dan heeft $y = 10^x = 10^{12}$ eigenlijk nul significante cijfers! We weten slechts dat y tussen $10^{11{,}5} \approx 3 \times 10^{11}$ en $10^{13{,}5} \approx 3 \times 10^{12}$ ligt.

Logaritmen

Tot slot bekijken we hoe fouten doorwerken in logaritmen. We beperken ons tot logaritmen met grondtal 10. Als $y = \log(x)$, dan geldt

$\Delta y \approx \frac{1}{\ln(10)} \cdot \frac{\Delta x}{x}$

want de afgeleide van y is $\frac{1}{\ln(10) \cdot x}$. Dus, *de absolute fout in* $y = \log(x)$ *is evenredig met de relatieve fout in* x. Dit leidt tot de weinig verrassende vuistregel: *het aantal significante decimalen in* $y = \log(x)$ *is gelijk aan het aantal significante cijfers in* x.

Voorbeeld

Als $x = 2{,}78 \times 10^{-5}$, dan heeft $y = \log(x) = -4{,}555955204\ldots$ drie significante decimalen, dus $y = -4{,}556$. Ter controle berekenen we de grensgevallen:

$\log(2{,}775 \times 10^{-5}) = -4{,}556737013$ en

$\log(2{,}785 \times 10^{-5}) = -4{,}555174800$

We vinden dus $y = -4{,}5560 \pm 0{,}0008$, terwijl $y = -4{,}556$ suggereert dat $y = -4{,}5560 \pm 0{,}0005$.

Hiervan hoeft u niet wakker te liggen, want zoals eerder gezegd, mogen we van het aantal significante cijfers niet meer verwachten dan een indicatie van de orde van grootte van de geschatte fout…

De logaritme en de macht vormen de schakel tussen de multiplicatieve en de additieve werelden: $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$ en $10^{x+y} = 10^x \cdot 10^y$. In de multiplicatieve wereld worden relatieve fouten opgeteld, in de additieve wereld worden absolute fouten opgeteld. Het is dus niet verwonderlijk dat bij $b = \log(a)$ en/of $a = 10^b$ de relatieve fout in a samenhangt met de absolute fout in b.

Tot slot

We hebben gezien dat het thema significantie vele mogelijkheden biedt voor de wiskundeles. Er zijn verbanden met statistiek (standaardafwijking, $\sqrt{n}$-wet, betrouwbaarheidsintervallen), met differentiëren ($\Delta f \approx f'(x) \cdot \Delta x$) en met de rekenregels voor logaritmen en exponenten. Wat we hier hebben gedaan met x^{α}, $\log(x)$ en 10^x kan worden uitgebreid naar functies.

Noot (red.)

Zie voor 'significante cijfers' bijvoorbeeld ook *nl.wikipedia.org/wiki/* of *www.natuurkunde.nl*

Over de auteur

Jeroen Spandaw is universitair docent en lerarenopleider wiskunde aan de Technische Universiteit Delft.
E-mailadres: *j.g.spandaw@tudelft.nl*

Als de eerste rood is, dan zijn ze allemaal rood

LOGICA IN 4-VWO ALS ONDERDEEL VAN WISKUNDE C

[Hugo Bronkhorst]

Inleiding
'Door de lessen Logica was ik meer gemotiveerd om naar de Wiskundeles te gaan, omdat ik de manier van lesgeven en de stof veel leuker vond en daarom ook beter mijn best deed', schreef een leerling uit 4-vwo over de nieuwe lessenserie Logica. Redeneren, kritisch nadenken, taalvaardigheden en met elkaar communiceren - doelen van Wiskunde C - komen terug in het lespakket waar ik nu twee jaar ervaring mee heb opgedaan. Centraal staan zogenaamde als-dan-beweringen, die concreet worden aangeboden in spelletjes, stripverhaaltjes, puzzels en wiskundige contexten voor de alfa-leerlingen: 'In eerste instantie vond ik het onzin maar toen ik het doorkreeg begreep ik ook het nut.'
Na een algemene beschrijving van de door mij ontwikkelde lessenserie en de mogelijkheden binnen Wiskunde C, zullen in dit artikel twee praktijkvoorbeelden uit de lessenserie Logica de revue passeren: de kaartjes en de wijze adviseurs. Van beide voorbeelden wordt de spelvorm uitgebreid toegelicht, omdat daarbij de interactie met de leerlingen van cruciaal belang is, zodat hun nieuwsgierigheid geprikkeld wordt.

Uit: F.H. van Eemeren, R. Grootendorst, P. van Straaten (1996): Leren argumenteren met Vader en Zoon. Amsterdam/Antwerpen: Contact.

Na een spel, puzzel of strip volgt altijd een reflecterende/theoretische opgave. In dit artikel staat Logica binnen Wiskunde C centraal, omdat het materiaal ontwikkeld is voor de alfa-leerlingen. Natuurlijk is redeneren ook belangrijk voor havo-leerlingen en bèta-leerlingen, maar die groepen vielen buiten mijn onderzoek. Bovendien bestaat er voor de bètaleerlingen al lesmateriaal [1].

Logica en Wiskunde C
In het nieuwe conceptexamenprogramma 2011 voor Wiskunde C wordt 'Logisch redeneren' expliciet genoemd in domein G [2]: 'De kandidaat kan logische redeneringen analyseren op correct gebruik.' Het omvat 40 studielasturen. De commissie Toekomst Wiskunde Onderwijs (cTWO) werkt op dit moment aan materiaal dat op een aantal scholen uitgetest gaat worden. De door mij ontwikkelde lessenserie Logica is ontwikkeld en uitgetest voordat bekend werd dat Logica definitief een plaats in het conceptprogramma zou krijgen. Toch sluit dit materiaal, dat 15 studielasturen omvat, prima aan bij doelen uit domein G. Tot die tijd kan het materiaal gebruikt worden binnen domein I, Keuzeonderwerpen, waarvoor het oorspronkelijk is geschreven. De afgelopen twee jaar is het materiaal in 4-vwo uitgetest onder leerlingen met Wiskunde A1 (nu: Wiskunde C) en Wiskunde A12 (nu: Wiskunde A). Het materiaal sprak hen aan. Ze gingen over het algemeen dan ook enthousiast met de opdrachten aan de slag.

Lespakket Logica
Het lespakket [3], waarin redeneren centraal staat, bestaat uit een achttal lessen en vier huiswerkopdrachten en is met name bedoeld voor de alfa- (en gamma-)leerlingen in 4-vwo met het profiel C&M of E&M. De lessen zijn zo opgezet dat de docent verschillende werkvormen kan toepassen: korte klassikale introducties en nabesprekingen, opdrachten die zelfstandig gemaakt kunnen worden, opdrachten voor tweetallen en groepsopdrachten. De huiswerkopdrachten zijn bedoeld voor individuele verwerking. Ik heb deze via de elektronische leeromgeving aangeboden, maar de opdrachten kunnen ook op papier gemaakt worden. Het uiteindelijke doel van de lessenserie is dat leerlingen goed met als-dan-beweringen overweg kunnen. Daar wordt stapsgewijs naar toe gewerkt. De inleiding van de lessenserie begint met een kort geschiedkundig kader. Van de syllogismen bij de oude Grieken wordt snel de stap naar de Moderne Logica van Gottlob Frege gemaakt. Er was tenslotte ook 2000 jaar nauwelijks iets mee gebeurd. Vervolgens worden in de eerste les al beweringen (algemene kennis) als 'Amsterdam is de hoofdstad van Noord-Holland' en '4 + 2 = 8' op waarheid gecontroleerd. Daarna worden redeneringen in de als-dan-vorm gegoten: 'Als ik een driehoek heb, dan is de hoekensom 180°.' Via relatief eenvoudige bewijsjes in de vlakke meetkunde en het geven van tegenvoorbeelden komt het begrip *gevalonderscheiding* om de hoek kijken. De bewijzen van de hoekensom in een driehoek en in een

figuur 1

vierhoek worden door de docent voorgedaan. Vervolgens moeten leerlingen zelf wat bewijsjes opschrijven, bijvoorbeeld voor de hoekensom van een vijfhoek en een invulbewijs bij de stelling van Pythagoras. In de lessenserie wordt bewust stilgestaan bij de woordvolgorde van het Nederlands om daarna het omdraaien van uitspraken en drogredenen in stripjes te onderzoeken. De woorden *als* en *dan* worden in het Nederlands namelijk lang niet altijd expliciet in de zin genoemd. Voorbeeld: 'Als ik hard fiets, dan kan ik het groene verkeerslicht halen' kan ook geschreven worden als: 'Door hard te fietsen kan ik het groene verkeerslicht halen' of 'Ik kan het groene verkeerslicht halen als ik hard fiets.' Leerlingen weten na deze lessen wanneer zij juiste conclusies kunnen trekken uit een als-dan-bewering: *modus ponens* en

figuur 2, 3, 4

modus tollens (***zie kader***). Ook kunnen zij een dubbele implicatie, de zogenaamde equivalentie, herkennen.

Modus ponens en modus tollens
Bewering: '*Als* het sneeuwt, (*dan*) komt Sandra niet naar school.'
Algemeen: Als *A*, dan *B*.
Modus ponens (bevestigende modus): Het sneeuwt, dus Sandra komt niet naar school.
Algemeen: *A*, dus: *B*.
Modus tollens (ontkennende modus): Sandra komt (wel) naar school, dus het sneeuwt niet.
Algemeen: niet-*B*, dus: niet-*A*.

De lessenserie wordt afgesloten met een stukje Propositielogica. Leerlingen kunnen beweringen omschrijven naar formules door gebruik te maken van propositieletters en de connectieven *en* ($\wedge$), *of* ($\vee$), *niet* ($\neg$), *als-dan* ($\Rightarrow$) en *juist dan als* ($\Leftrightarrow$). De waarheid van deze beweringen kunnen zij vervolgens onderzoeken met waarheidstabellen. De waarheidstabel bij het connectief *en* staat als voorbeeld ***in figuur 1***.
De leerlingen hebben zo dus ook iets systematisch aangeleerd gekregen. Vanuit een wiskundig oogpunt bekeken is een formalisering belangrijk. Door een puzzel die eerder al informeel als huiswerkopdracht is gemaakt, formeel met waarheidstabellen op te lossen, zien de leerlingen dat de tabellen een handig hulpmiddel (algoritme) zijn voor bepaalde ingewikkelde problemen.
Het is mooi om te zien hoe het inzicht van de leerlingen bij het bewijzen stapsgewijs doorbreekt. Ter illustratie een korte discussie tussen een tweetal leerlingen en hun docent. Ze hadden eerst bij opgave a een bewijs geleverd. Bij b werd vervolgens gevraagd: *'Kun je bij de bovenstaande bewering nu toch nog een tegenvoorbeeld geven?'*
Leerling 1: *'Wij hebben echt alles geprobeerd maar we kunnen geen enkel tegenvoorbeeld vinden.'*
Ik: *'Wat heb je dan bij vraag a gedaan?'*
Leerling 1: *'Ja, een bewijs geleverd voor elke driehoek.'*
Ik: *'Dus…'*
Leerling 2: *'Oh ja! Deze vraag is echt gemeen!!'*
Pas door deze extra vraag kregen deze leerlingen écht door wat de kracht van een bewijs is en dat je daarmee alle uitzonderingen uitsluit.

Kaartjes

De *Kaartjes*[4] is een redeneerspel dat als rode draad door het lespakket loopt - in de introductieles als kaartspel, later als concreet referentiekader bij theorie-opdrachten. In de introductieles bestaat dit spel uit kaarten die aan de voorkant groen of rood zijn en aan de achterkant zwart. Bij elke ronde worden er vijf kaarten met de zwarte kant naar voren aan het bord gehangen volgens de regel: *Als een kaart in het rijtje rood is, dan is de volgende kaart in het rijtje* (*rechts dus*) *ook rood.* De leerlingen mogen bepalen welke van de vijf kaarten ze willen zien (de meerheid van stemmen telt) om vervolgens de kleur van de andere kaarten te voorspellen. Het spel wordt dus klassikaal gestuurd gespeeld. Het werkblad vullen ze in teams van twee in. In de docentenhandleiding staan suggesties om het gehele spel in groepjes van drie uit te spelen met een gewoon stok kaarten.
In een les in 4-vwo gaven team 1 en 2 de onderstaande redeneringen tijdens de discussies welke kaart omgedraaid moest worden:
Team 1: *'We willen de eerste zien, want als die rood is, zijn ze allemaal rood.'*
Team 2: *'Nee, we willen de derde zien, want dan heb je een veel grotere kans dat we wat kaarten goed hebben.'*
Na enig overleg draaide ik de derde kaart om en die kaart bleek rood te zijn. Van het rijtje was nu één kaart gegeven en de leerlingen zagen voor het bord de situatie als ***in figuur 2***. Vervolgens was de opdracht aan de leerlingen een voorspelling te doen voor de andere vier kaarten. De gegeven regel bleef natuurlijk gelden.
Een leerling tegen zijn teamgenoot: *'De derde is rood, dan weten we er al drie zeker.'*
Hun voorspelling staat ***in figuur 3***. Nadat elk team een voorspelling had gedaan, draaide ik de overige kaarten om en maakten we de balans op. Hoeveel kaarten waren er goed, fout of niet voorspeld (***zie figuur 4***)? Na vijf ronden won het team met de meeste plusjes (dus de meeste goed geraden kaarten). Bij gelijke stand won het team met de minste minnetjes. Na afloop van dit spel bleken leerlingen achterliggende redeneringen bij dit spel goed te kunnen opschrijven.
In het huiswerk staan vervolgens twaalf rijtjes van vijf kaarten waarvan elke kaart opnieuw rood of groen gekleurd is. Aan de leerlingen de taak om na te gaan of elk rijtje aan de gegeven regel voldoet: *Als een kaart in het rijtje rood is, dan is de volgende kaart in het rijtje ook rood.* Verderop in de lessenserie worden steeds vier van de vijf kaarten getoond. De rijtjes worden opnieuw van links naar rechts bekeken. Aan de leerlingen wederom de taak om te controleren of elk rijtje aan de bovengenoemde regel voldoet, of dat ze dat niet kunnen weten.
Ook bij het trekken van conclusies uit als-dan-beweringen (bijvoorbeeld modus ponens en modus tollens) en de introductie van waarheidstabellen komen de kaartjes nog een keer terug. De kaartjes vormen tenslotte een concreet ervaren voorbeeld.

De wijze adviseurs

In les 4 had ik een aansprekende klassenopdracht, *De wijze adviseurs*. Deze diende om als-dan-redeneringen in het Nederlands en de wiskunde uitgebreid te oefenen. Ook werden in deze opdracht meerdere redeneringen achter elkaar gevoerd. *De wijze adviseurs*[5] is een variatie op een probleem dat ook wel bekend staat als de *Modderige kinderen*. In *De wijze adviseurs* wil de koning de wijsheid van zijn adviseurs testen. Hij doet dat door bij alle adviseurs een witte of een zwarte stip op hun voorhoofd te zetten. De adviseurs zijn zo in een kring opgesteld dat ze alle stippen kunnen zien, maar niet die van zichzelf. De koning gaat in het midden van de kring staan en zegt: *'Ik heb bij ieder van jullie een witte of een zwarte stip op het voorhoofd geschilderd. Ten minste één van de stippen is zwart. Wie een zwarte stip heeft, dient zo snel mogelijk naar voren te stappen.'*

In de klas stelde ik de leerlingen in een cirkel op en vroeg hen om de ogen dicht te doen. Ik plakte de stippen met ronde stickertjes op hun voorhoofd. De eerste keer plakte ik maar één zwarte stip en voor de rest witte stippen. Toen de leerlingen hun ogen open deden, keken ze elkaar gespannen aan. Nadat de docent, die de koning speelde, de bovenstaande uitspraak deed, stapte heel snel de ene leerling met de zwarte stip naar voren. Ze zei hierover in de nabespreking: *'Ik zag allemaal witte stippen, maar er moest er minstens één zwart zijn, dus ben ik naar voren gestapt.'* Een leerling met een witte stip reageert: *'Ja, ik zag een zwarte stip en verder allemaal witte, dus ik wachtte even af wat ze zou doen.'*
Voor de tweede ronde plakte ik bij twee leerlingen een zwarte stip. Het denkproces bij de leerlingen verliep nu moeizamer, maar dat was juist spannend. Een leerling met een witte stip zei: *'Ik zag wat witte en twee zwarte stippen. Ik dacht: Er zijn er in ieder geval twee zwart, maar het kunnen er ook drie zijn.'* Een van de twee leerlingen met een zwarte stip zei: *'Ik zag een zwarte stip bij Pim en verder alleen witte. Maar Pim stapte niet naar voren, dus moest ik er ook een hebben. Daarom stapte ik naar voren.'*
Bij dergelijke denkprocessen in de klas speel je als docent een cruciale rol; het is namelijk belangrijk om de leerlingen duidelijk te laten reflecteren en alles strak te regisseren om te voorkomen dat het misgaat of dat belangrijke denkstappen niet naar boven komen. Dat leerlingen hierdoor uitgedaagd werden blijkt uit de evaluatie van de lessenserie. Een leerling schreef: *'Het lesmateriaal was heel leuk, vooral die drie koningen. Dat idee met voor de klas en die stippen vond ik heel origineel en leuk bedacht. Met dat soort dingen krijg je meestal wel mijn aandacht te pakken.'*

Leerlingenfeedback

De leerlingen hebben de lessen over het algemeen enthousiast doorgewerkt. Uitkomsten van een leerlingenenquête en interviews gaven aan dat de lessenserie de leerlingen aansprak en dat ze het gevoel kregen wat geleerd te hebben. Dat ze inderdaad beter zijn gaan redeneren, blijkt uit een vergelijking van de resultaten tussen de voorkennistoets en de eindtoets waarin een aantal als-dan-rederingen de revue passeert. Meer hierover kunt u lezen in [3] met daarin ook het lesmateriaal en de bijbehorende docentenhandleiding. Logica als onderdeel van het vak Wiskunde werd dan ook als een gewenste aanvulling ervaren, zowel door de docent als door de leerlingen. Een tweetal reacties: *'Het is leuker om iets te doen wanneer je echt goed snapt waar je mee bezig bent.'* En: *'Ik vond het gewoon veel leuker om zo te werken!'*

Met dank aan Gerard Renardel de Lavalette, Marco Swaen, Rineke Verbrugge en Pauline Vos.

Literatuur

[1] - Jan van Eijck, Jan Jaspers, Jan Ketting, Marc Pauly (2002): *Denkende Machines. Computers, rekenen, redeneren*. Amsterdam: Amsterdam University Press.
- Jan van Eijck, Albert Visser (2005): *Inzien en bewijzen*. Amsterdam: Amsterdam University Press.

[2] Commissie Toekomst Wiskunde Onderwijs (2008): *Concept examenprogramma 2011, vwo Wiskunde C*. Utrecht: Freudenthal Instituut.

[3] Hugo Bronkhorst (2006): *Logica in de bovenbouw van het vwo*. Groningen: Faculteit der Wiskunde en Informatica, Rijksuniversiteit Groningen. Gratis download van deze scriptie met lesmateriaal en docentenhandleiding op: *www.hugobronkhorst.nl*.

[4] Christos Chasiotis (1995): *From Common Sense to Formal Logic / Use of Logical Games for the Assessment, Investigation and Improvement of Logical Reasoning*. In: *Congresbundel 47ste conferentie van CIEAEM*. Berlijn: Freie Universität; pp. 440-447.

[5] Erik C.W. Krabbe, ed. (2005): *Logica 3 / Model, Oneindigheid en Paradox*. Groningen: Faculteit der Wijsbegeerte, Rijksuniversiteit Groningen.

Over de auteur

Hugo Bronkhorst is leraar wiskunde aan de Van der Capellen Scholengemeenschap in Zwolle. Hij geeft les in de onder- en bovenbouw en binnen het tweetalig onderwijs.
E-mailadres: *bronkhorsthugo@gmail.com*
URL: *www.hugobronkhorst.nl*



Eindrapport Expertgroep Doorlopende Leerlijnen Taal en Rekenen

Op 23 januari 2008 werd de eindrapportage van de Expertgroep Doorlopende Leerlijnen Taal en Rekenen aangeboden aan de bewindslieden van het ministerie van OCW. Het rapport is getiteld 'Over de drempels met taal en rekenen'. Hieronder vindt u allereerst een deel van het persbericht, daarna enige toelichting op de beschreven referentieniveaus, vervolgens de hoofd- en algemene aanbevelingen uit het hoofdrapport, en tot slot de 15 aanbevelingen van de werkgroep rekenen en wiskunde onder voorzitterschap van prof.dr. Anne van Streun.

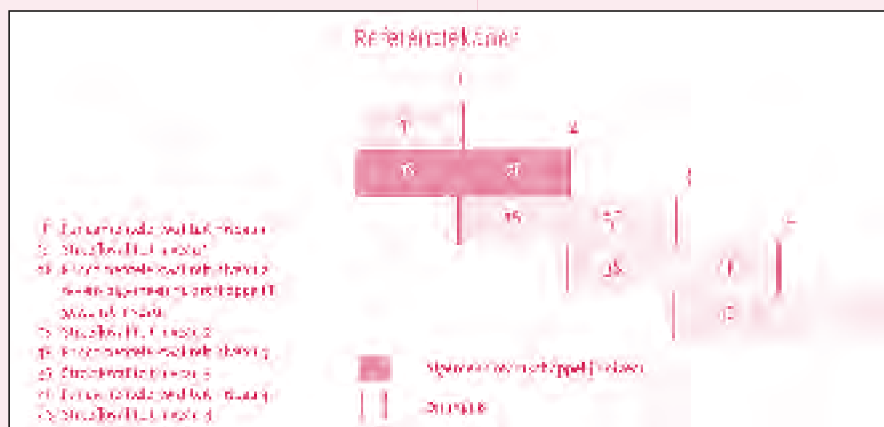
Persbericht

Een speciaal ingestelde Expertgroep pleit voor voorgeschreven tussenniveaus voor taal en rekenen tijdens de hele schoolcarrière van leerlingen in het Nederlandse onderwijs. De groep die onder aanvoering van voorzitter Heim Meijerink de niveaubeschrijvingen uitwerkte, stelt dat deze maatregel de hoge uitval in het onderwijs zal verminderen en zal zorgen voor een beter kennisniveau voor taal en rekenen/wiskunde van schoolverlaters die instromen in maatschappij en beroep.
Jongeren die het mbo en hbo binnenstromen, blijken op dit moment veel moeite te hebben met lezen, spellen en rekenen. In hun schoolloopbaan zitten een paar lastige 'drempels' bij de overgangen tussen basisonderwijs, vmbo, mbo, havo, vwo, hbo en universiteit. De kansen van leerlingen op een optimale schoolloopbaan worden vergroot als die drempels worden geslecht. Vandaar dat de Expertgroep Doorlopende Leerlijnen Taal en Rekenen vindt dat de overheid de niveaubeschrijvingen voor taal en rekenen moet voorschrijven. En dat is opmerkelijk want scholen hebben op dit moment behoorlijk veel vrijheid om leerlingen naar eigen inzicht voor te bereiden op de overgangen en examens. Het lijkt daarmee een markant omslagpunt in de geschiedenis van ons onderwijsbeleid.

'We respecteren de vrijheid van scholen en de ruimte voor leraren, ze zorgen voor motivatie en betrokkenheid. Maar de autonomie van scholen kent grenzen, en dit vinden we zo'n grens', stelt Heim Meijerink. Deze opvatting werd trouwens breed door docenten ondersteund tijdens de raadplegingen die de expertgroep de afgelopen maanden heeft gehouden.
De Expertgroep Doorlopende Leerlijnen Taal en Rekenen is door de bewindlieden van OCW ingesteld met de opdracht te adviseren over de vraag wat leerlingen van taal en rekenen moeten kennen en kunnen op een aantal overgangen tussen de verschillende schooltypen van primair onderwijs tot hoger beroepsonderwijs en van onderwijs naar arbeidsmarkt. 'Wat is van belang voor alle leerlingen en wat zijn de consequenties daarvan voor de lerarenopleiding', waren daarbij vragen van het ministerie. De opdracht is zo uitgevoerd dat er nu 'doorlopende leerlijnen' zijn die ervoor zorgen dat het onderwijsresultaat van de ene sector naadloos aansluit op dat van de andere.
Voor de lerarenopleidingen moeten niveaus voor taal en rekenen worden gehanteerd, zowel bij de aanvang van de studie als bij de afsluiting ervan.
Daarnaast biedt de Expertgroep leraren houvast door in vier referentieniveaus op iedere overgang tussen en binnen schooltypen concreet te beschrijven wat leerlingen aan kennis en vaardigheden moeten hebben. Zo kunnen de leraren de ontwikkeling van hun leerlingen bepalen, volgen en stimuleren. Opvallend onderdeel van de referentieniveaus is de introductie van het algemeen maatschappelijk functioneel niveau. Dat is het niveau dat alle Nederlanders geacht worden te halen om deel te kunnen nemen aan het maatschappelijk verkeer. *[Einde persbericht]*

Referentieniveaus – enkele citaten uit de rapporten

- 'Wij realiseren ons dat er drempels zijn gedurende de leerloopbaan. Die drempels worden zichtbaar gemaakt in het referentiekader. Het gaat om drempels die zich voordoen bij leerlingen wanneer zij twaalf jaar, zestien jaar, achttien jaar, of ouder zijn.'
- 'Voor rekenen wordt het vierde referentieniveau buiten beschouwing gelaten omdat we hier dan vooral op het terrein van de wiskunde komen.'
- 'Het vaststellen van een referentiekader mag er niet toe leiden dat deze leerlingen zich niet verder ontwikkelen, dat er voor hen onvoldoende uitdaging is. Om die reden zijn de vier referentieniveaus verdeeld in twee kwaliteiten: een *fundamentele kwaliteit* en een *streefkwaliteit*. De fundamentele kwaliteit hoort door alle leerlingen gerealiseerd te worden. De streefkwaliteit is een uitdagend perspectief voor leerlingen die op dat moment meer aankunnen.'



- ‘Een kenmerk van rekenen & wiskunde is de cumulatieve structuur van het vakgebied waarin begrippen en rekenprocedures op elkaar voortbouwen. Een voorwaarde voor het kunnen verwerven van nieuwe kennis en vaardigheden is de beheersing van de begrippen en methoden waarop wordt voortgebouwd. Het voortbouwen op bestaande kennis kan gaan in de richting van het functioneel gebruiken in allerlei situaties uit het dagelijks leven, uit andere vakgebieden en uit praktijk- of beroepssituaties. Dat voortbouwen kan ook een verder verdiepen zijn van de bestaande kennis in de richting van formaliseren, abstraheren en generaliseren, aansluitend bij de wiskundevakken in het voortgezet onderwijs. Daarom zijn in het voortgezet onderwijs voor het rekenen twee sporen te onderscheiden met verschillende accenten, namelijk het F-spoor (fundamentele kwaliteit) van functioneel gebruiken en het S-spoor (streefkwaliteit) van formaliseren generaliseren en abstraheren, samengevat met de term verdiepen.
  Het F-spoor loopt vanaf het basisniveau op 12-jarige leeftijd (1F, fundamentele kwaliteit) naar het burgerschapsniveau op 16-jarige leeftijd (2F, fundamentele kwaliteit), met een mogelijke verbreding of toespitsing naar de leeftijd van omstreeks 18 jaar (3F, fundamentele kwaliteit). Niveau 2F beschouwen we als het niveau dat alle Nederlanders zouden moeten beheersen om op het gebied van rekenen maatschappelijk goed te kunnen functioneren. Het S-spoor loopt vanaf het streefniveau op 12-jarige leeftijd (1S, streefkwaliteit) naar het streefniveau op 16-jarige leeftijd 2S, met een mogelijke doorloop naar 3S, omstreeks 18 jaar. Dit andere spoor wordt in de bovenbouw van het basisonderwijs door het grootste deel van de leerlingenpopulatie gevolgd en verzorgt mede de aansluiting bij de wiskundevakken in vmbo TL, havo-vwo en mbo en bij het gebruik van rekenen en wiskunde in andere vakken. We spreken dan over niveaus 1S (streefkwaliteit), 2S (streefkwaliteit) en 3S (streefkwaliteit), die op elkaar aansluiten en die de basisniveaus overlappen. Bij 3S gaat het om het (nieuw voorgestelde) rekendomein van het vak wiskunde A in de havo-bovenbouw of om enkele technische richtingen in het mbo.
  Bij de overgangen tussen schooltypen stappen leerlingen deels over van het ene spoor naar het andere spoor, bijvoorbeeld van 2S (vmbo TL) naar 3F (mbo-4), maar ook van 2S (vmbo TL) naar 3S (4 havo).’

Hoofdaanbevelingen Expertgroep

A. Voer onze niveaubeschrijvingen in.
B. Geef prioriteit aan basiskennis en basisvaardigheden voor taal en rekenen (dat betekent bijvoorbeeld inoefenen en onderhouden).
C. Investeer in voorwaarden (scholing, tijd, middelen) om niveauverhoging te bereiken.

Algemene aanbevelingen

- Stel de beschreven referentieniveaus in een sectoroverstijgend document vast en schrijf ze voor en zet in op continue kwaliteitsbewaking, zowel op landelijk niveau als op het niveau van de school.
- Stimuleer extra inspanningen en bied in bepaalde gevallen extra onderwijstijd. Prioriteit geven aan taal en rekenen betekent meer of intensievere instructie, en voor bepaalde leerlingengroepen meer onderwijstijd in deze vakken.
- Stimuleer dat de school een integraal taal- en rekenbeleid voert, met operationele doelen en een aanpak gericht op interne en externe aspecten.
- Zorg dat diverse vormen van nascholing beschikbaar komen, nascholing gericht op de eigen taal- en rekenvaardigheden van de docenten, gericht op het verbeteren van het aanleren van taal- en rekenvaardigheden door de leerlingen, alsmede gericht op coördinerende activiteiten binnen het taal- en rekenbeleid, en stimuleer scholen en docenten van dit aanbod gebruik te maken.
- Start, vooruitlopend op spoedige wettelijke voorschriften, pilots waarin scholen op onderdelen succeservaringen kunnen opdoen.
- Laat voor het primair onderwijs een eindtoets ontwerpen voor 1F- en 1S-niveaus, eventueel bij of in de bestaande eindtoetsen voor het primair onderwijs, en onderzoek de mogelijkheid deze eindtoets te verplichten voor alle leerlingen.
- Zorg ervoor dat in het voortgezet onderwijs (vmbo, havo, vwo) de doorstroomrelevante onderdelen uit het taal- en rekenonderwijs op de diverse niveaus worden getoetst, hetzij als voorwaarde voor deelneming aan het centrale examen, hetzij als onderdeel van het centraal examen, dan wel van het schoolexamen.
- Kom voor het mbo voor de onderdelen taal en rekenen tot een vorm van centrale examinering. Deze vorm van centrale examinering moet de mogelijkheid bieden om aan te sluiten bij de competentiegerichte kwalificatiestructuur en de diverse onderwijskundige aanpakken van de instellingen.
- Een eerste stap in deze toezichtssystematiek is dat de scholen zich in deze verantwoorden. Laat de Inspectie inzichtelijk maken wat de bijdrage is van scholen aan de prestaties van leerlingen. Deze zogeheten toegevoegde waarde wordt afgezet tegen gemiddelden van groepen scholen met overeenkomstige kenmerken.
- Richt een agentschap in dat over de sectoren heen de implementatie van referentieniveaus bevordert, door onder meer:
  - ondersteuningsaanbod te entameren en te organiseren,
  - scenario’s te ontwikkelen voor effectieve vormgeving van taal- en rekenonderwijs,
  - implementatievragen van de scholen te expliciteren en te laten beantwoorden,
  - communicatie, ook tussen de sectoren, te verzorgen,
  - activiteiten binnen de sectoren te stimuleren en te coördineren,
  - de voortgang te monitoren,
  - te adviseren bij het opstellen en uitvoeren van sectorale regelgeving.

Aanbevelingen met betrekking tot Rekenen

De werkgroep rekenen en wiskunde onder voorzitterschap van prof.dr. Anne van Streun deed de volgende 15 aanbevelingen in haar deelrapport ‘Over de drempels met rekenen’:

1 *Gedifferentieerde benadering*
Met behoud van de aandacht voor leerlingen voor wie het algemeen maatschappelijk niveau 1F-2F-3F het natuurlijk plafond is, moeten meer

leerlingen op het hogere niveau 1S-2S-3S gaan presteren dan nu het geval is.

2 *Niveauverhoging primair onderwijs*
Het primair onderwijs is funderend onderwijs en moet alle leerlingen de kans bieden op een solide basis voor de verschillende daarop volgende leerroutes. Er is een stevige krachtsinspanning nodig om het gewenste hogere niveau op de aangegeven zwakke punten in de kwaliteit van de opbrengst van het primair onderwijs te bereiken.

3 *Onderzoek naar onderwijspraktijk primair onderwijs*
Voor de verklaring van de gesignaleerde verslechteringen en magere resultaten op onderdelen in het peilingsonderzoek PPON2004 is nader onderzoek noodzakelijk naar wat en hoe er in de praktijk van het primair onderwijs wordt onderwezen.

4 *Peilingsonderzoek naar opbrengst voortgezet onderwijs*
Analoog aan PPON voor het primair onderwijs is het wenselijk om ook voor het vo een langlopend peilingsonderzoek op te zetten om betrouwbare informatie te verkrijgen over de opbrengst voor de basisvaardigheden taal en rekenen.

5 *Paraat hebben*
Een duidelijk te benoemen fundament aan begrippen, rekenfeiten, automatismen, routines, moet worden geconsolideerd en verankerd. In de praktijk van het onderwijs moet meer expliciet werk worden gemaakt van het systematisch consolideren en oefenen totdat het gewenste beheersingsniveau van paraat hebben is bereikt.

6 *Gebruiken in andere leergebieden*
Het gebruiken en onderhouden van basisvaardigheden op het gebied van het rekenen & wiskunde moet voor een belangrijk deel plaats vinden tijdens het toepassen in andere leergebieden en praktijksituaties. De aanpak die in rekenen & wiskunde is aangeleerd moet bij de docenten van andere vakken bekend zijn en zoveel mogelijk worden gebruikt.

7 *Verdiepen*
Rekening houden met verschillen houdt voor rekenen & wiskunde ook in dat de leerlingen die beter kunnen abstraheren, formeel manipuleren en generaliseren dan de modale leerlingen in hun onderwijsgroep door het verdiepen worden uitgedaagd om in de beschikbare tijd hun plafond te benaderen.

8 *Onderhouden in onderbouw havo-vwo*
Bij de overgang van het primair onderwijs naar havo-vwo sluiten van beide kanten de leerlijnen rekenen & wiskunde niet goed aan. In de onderbouw havo-vwo wordt niet meer systematisch gewerkt aan het onderhouden en uitbreiden van de verworven kennis en vaardigheden op het gebied van het rekenen. Op basis van de referentieniveaus moeten in nationaal en regionaal overleg tussen scholen voor primair onderwijs en voortgezet onderwijs die leerlijnen worden geharmoniseerd.

9 *Rekenen & wiskunde voor alle leerlingen in het vmbo*
Alle leerlingen moeten minimaal het basale referentieniveau 2F (burgerschapsniveau) bereiken, wat kan worden gerealiseerd door ze minimaal het rekendomein uit het vmbo-examenprogramma wiskunde kb te laten volgen.

10 *Herstel leerlijnen in het mbo*
Overeenkomstig de voorstellen in het 'Raamwerk rekenenwiskunde mbo' en de door ons beschreven referentieniveaus 2F en 3F moet op korte termijn begonnen worden met het herstel van de ongewenst afgebroken of onderbroken leerlijnen in het mbo.

11 *Uitstroomniveau mbo en instroomniveau hbo*
In lijn met de voorstellen in het 'Raamwerk rekenenwiskunde mbo' verdient het aanbeveling om alle mbo-leerlingen minimaal het referentieniveaus 2F te laten bereiken en onderhouden. Het uitbreiden van referentieniveau 2F naar 3F geeft een voldoende kennisbasis voor de instroom in het grootste deel van het hbo.

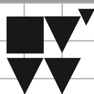
12 *Instroom pabo*
Voor instroom in de pabo is het wenselijk een module Voortgezet Rekenen in mbo en havo te doen ontwikkelen, die opleidt tot een referentieniveau 3S dat beginnende pabostudenten een stevige vakinhoudelijke basis verschaft.

13 *Niet halen van de basiskwaliteit 1F*
De ambitie van de Expertgroep is dat meer leerlingen de basiskwaliteit 1F zullen behalen dan nu het geval is. Voor de groep leerlingen die vanaf groep 6 in de ontwikkeling van hun rekenvaardigheid stagneert, moet een afzonderlijk leertraject worden ontwikkeld.

14 *Functionele situaties*
Het is wenselijk om met name in het mbo een ontwikkelingsproject uit te voeren, waarin de functionele situaties in maatschappij en beroep het startpunt zijn voor de ontwikkeling van burgerschapscompetenties, waarin de basisvaardigheden uit rekenen & wiskunde een rol kunnen spelen.

15 *Ambitie referentieniveaus 1F en 1S*
- Het percentage leerlingen dat minimaal het referentieniveau 1F behaalt, moet toenemen van 75% naar 85%.
- Het percentage leerlingen dat minimaal het referentieniveau 1S behaalt, moet toenemen van 50% naar 65%.

Noot
Voor meer informatie zie:
www.taalenrekenen.nl en *www.ocw.nl*



Van de bestuurstafel

[Wim Kuipers]

Het jaar 2008 zal voor het bestuur een spannend jaar worden. Veel werkzaamheden staan ons te wachten.
Het bestuur is op dit moment actief met het aantrekken van nieuwe bestuursleden. Swier Garst zal ons als penningmeester in dit jaar verlaten en ook Wim Kuipers wacht op vervanging als secretaris. Met enkele belangstellenden is het bestuur in gesprek om de vacatures vervuld te krijgen.
Begin december heeft het bestuur met enkele deskundigen een bezinningsmoment ingelast. Bezinning op de vraag welke speerpunten van beleid we moeten noteren en wat onze visie is op een aantal van deze punten. In de komende tijd zal de vereniging een rol spelen in kwalificatie en professionalisering. Het gaat hier om deelname aan het project WiVa (Wiskundeleraar Vakbekwaamheden) samen met SBL (Stichting Beroepskwaliteit Leraren) en Freudenthal Instituut. Tevens gaat het hierbij om betrokkenheid inzake het lerarenregister [zie het artikel van Marianne Lambriex; red.].

Het bestuur beraadt zich op het organiseren van een soort veldraadpleging in verband met de nieuwe programma's. Wat zijn de consequenties voortvloeiend uit het rapport Dijsselbloem? Vernieuwen is nodig en uitdagend maar hoe doen we dat op een verantwoorde manier. Het bestuur zou graag in samenwerking met anderen een handboek didactiek op de markt willen zetten, of de mogelijkheid onderzoeken voor de uitgave van een soort Zebraboekje voor docenten als een didactische handreiking, en dit nader toelichten op regionale bijeenkomsten.
Door al de bewegingen in het onderwijs is het bestuur geroepen om zitting te nemen in een diversiteit aan commissies e.d. In de komende tijd hopen we regelmatig verslag te doen van onze ervaringen binnen die werkverbanden.

Beroepsstandaarden lerarenregister

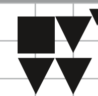
[Marianne Lambriex]

Samenvatting
Er is momenteel veel te doen over de leraar. Zo was er recent het advies *Leerkracht!*[1]. Het lerarentekort is nog steeds zeer actueel, zeker voor wiskundedocenten. En daarnaast is er een start gemaakt met de discussie over een mogelijk beroepsregister voor alle docenten, naar aanleiding van het in werking treden van de wet BIO (beroepen in het onderwijs). De NVvW heeft het initiatief naar zich toegetrokken om uit te zoeken wat een beroepsregister voor wiskundedocenten zou kunnen inhouden, onder andere op het gebied van professionalisering. Hieronder enkele eerste resultaten. Het onderzoek wordt afgerond in het voorjaar van 2008. Het totale traject van invoering van een beroepsregister zal overigens enkele jaren in beslag nemen.

WiVa
Het bestuur van de NVvW heeft de projectgroep WiVa (Wiskundeleraar Vakbekwaamheden) samengesteld, waarin ook SBL (Stichting Beroepskwaliteit Leraren) en het Freudenthal Instituut participeren. Doel is beroepsstandaarden voor wiskundeleraren te ontwikkelen, en tevens registratiecriteria voor opname in het lerarenregister en vakspecifieke eisen voor continue professionalisering te ontwikkelen. De projectgroepleden zijn Marianne Lambriex (NVvW), Monica Wijers (FIsme) en Vincent Jonker (FIsme) en vanuit SBL participeert Natalie van der Veen.

Waarom een Lerarenregister?
Wat heb je eraan als je naam ergens op een lijst staat? Dat is ongeveer de eerste vraag van de meeste collega's die we over dit lerarenregister horen. We leggen dan uit dat het niet zomaar een lijst is en dat je daar niet zomaar opkomt als je toevallig wiskundeles geeft. Al enige tijd vallen we onder de Wet BIO en daarmee is een aantal zaken geregeld dat nogal ingrijpt op het vroegere systeem van bevoegdheden. Een nieuwe regeling is dat het bevoegd gezag de bekwaamheid van de docent bepaalt; niet langer is een bevoegdheid noodzakelijk, wel bekwaamheid. Om die bekwaamheid aan te tonen is het bevoegd gezag per 1 augustus 2007 wettelijk verplicht per docent een bekwaamheidsdossier te hebben. Veel managers zijn hier al mee bezig en storten de inmiddels bekende 7 competenties, ontwikkeld door de SBL, over hun personeel uit. De NVvW stelt zich echter op het standpunt dat niet het bevoegd gezag alleen de bekwaamheid van de leraar kan bepalen maar dat bij uitstek de beroepsgroep zelf de aangewezen instantie is om dit te kunnen. Leraren bepalen de bekwaamheden van leraren! Dat kan middels een register, dat geeft een garantie naar de buitenwereld, en kan inspireren tot kwaliteit.

Nog meer vragen
Hoe dat lerarenregister eruit gaat zien is dan de volgende vraag, en dan volgen er vlug nog meer: Wat zijn criteria voor registratie? Wie gaat het register beheren? Is er draagvlak onder leraren? Is er draagvlak onder schoolleiders? Wie profiteert ervan? Hoe ziet het er fysiek uit? Hoe wordt het administratief geregeld? Wat gaat het kosten? Wie gaat dat betalen? Wat zijn nadelen, risico's? Wat zijn de beroepsstandaarden? Hoort er een beroepscode bij? Enz., enz.



voor wiskundeleraren;

Deze vragen kan de projectgroep WiVa niet allemaal alleen beantwoorden en daarom participeren we in allerlei samenwerkingsprojecten van de SBL met andere vakinhoudelijke verenigingen. Uit deze samenwerking zijn generieke beroepsstandaarden ontwikkeld die voor elke leraar gelden en is gebleken dat er behoefte is aan meer vakspecifieke standaarden. Aan een gymdocent worden andere eisen gesteld dan aan een wiskundeleraar. De NVvW is voorloper samen met de KVLO (leraren lichamelijke opvoeding) die al een register hebben en Levende Talen die met het project BiT vooral de generieke standaarden vastlegt.

Wat wordt er geregistreerd?

Al heel veel beroepsgroepen hebben een register; denk daarbij aan bijvoorbeeld artsen, notarissen en accountants. In dat rijtje horen ook leraren thuis; een register is echter nooit van de grond gekomen. Studie van die bekende registers wijst uit dat ze bestaan uit een opsomming van beroepsstandaarden, een beschrijving van de onderhoudsverplichting en een beroepscode. Zo gaat, zoals het er nu voorstaat, ook het lerarenregister eruit zien. Daarbij zijn de beroepsstandaarden, aan leraren te stellen kwaliteitseisen, te formuleren als competenties, is de onderhoudsverplichting te lezen als bijscholing en professionalisering en hoort een beroepscode onderschreven worden. Verdere professionalisering moet ruim worden opgevat (er is een grote diversiteit aan professionaliseringsactiviteiten denkbaar).
Nu wordt er gedacht over drie fasen in registratie:

1. Basisregister (ieder die een bevoegdheid behaald heeft),
2. Lerarenregister (periodes van 4 jaar, aantoonbare groei van professionaliteit),
3. Expertregister.

Vakmanschap

Alsmaar is er sprake van de 7 competenties, echter die gaan alle over het meesterschap en niet over het vakmanschap. Ergens in competentie 3, de vakdidactische competentie, komt het vak een beetje aan de orde - veel te weinig stelt de NVvW. Juist wiskundeleraren bepalen de bekwaamheden van wiskundeleraren! Vandaar dat WiVa (en ook projecten vanuit andere vakverenigingen, zoals BiT voor Levende Talen[2]) de vakspecifieke competenties aan het onderzoeken is en deze als beroepsstandaarden beschrijft in de volgende ordening: Vakkennis, Leerprocessen, Toetsing en Contexten. Dat onderzoek is gestart in juli 2007 en loopt een klein jaar en daarin worden en zijn de volgende activiteiten ontplooid:

- interview docenten, lerarenopleiders, leerlingen en experts;
- aansluiting op de Kennisbasis wiskunde, zoals deze binnen de lerarenopleiding steeds meer invulling krijgt[3];
- enquête ook online (nu ook nog in te vullen[4]);
- proeftraject, waarin docenten nodig zijn uit alle lagen van het vo
- workshops tijdens NVvW studiedag 2007 en andere bijeenkomsten;
- onderzoek en nog veel meer…

Vervolg

Door het rapport *Leerkracht* is de ontwikkeling van een eventueel register in een versnelling gekomen en heeft het project de wind mee. Gedurende het jaar gaat u zeker nog meer hierover in de media vernemen en ook van ons project, via Euclides en via de website.

Informatie

Nadere informatie kan verkregen worden via de projectgroep WiVa; e-mailadres: *m.lambriex@nvvw.nl* (Marianne Lambriex, Monica Wijers, Vincent Jonker, Natalie van der Veen).

Noten

[1] *Leerkracht!* Advies van de commissie leraren (onder voorzitterschap van Rinnooy Kan). September 2007. Digitaal beschikbaar via: *www.minocw.nl/documenten/rapport_leerkracht_2.pdf*
[2] Zie: *www.levendetalen.nl*, klik daar op BiT (Beroepsstandaarden en register in het Talenonderwijs)
[3] Zie: *www.feo.hvu.nl/kennisbasis*
[4] Zie: *www.nvvw.nl*, klik daar op Beroepsregister

Puzzel 83-5

Een ongewone vergelijking

[Frits Göbel]

In de opgaven van deze aflevering speelt de *delerfunctie* een hoofdrol. Het aantal delers van het natuurlijke getal n wordt gewoonlijk genoteerd als $d(n)$. Deze functie is multiplicatief, dat wil zeggen:
als ggd$(m, n) = 1$,
dan is $d(m \times n) = d(m) \times d(n)$.
In combinatie met $d(p^a) = a + 1$ (p priem) levert dit een snelle methode om $d(n)$ te bepalen zodra we de ontbinding van n kennen.
Bijvoorbeeld: $d(12) = d(2^2) \times d(3) = 3 \times 2 = 6$ en $d(2000) = d(2^4) \times d(5^3) = 5 \times 4 = 20$.

In beide voorbeelden is $d(n)$ een deler van n. Je zou je kunnen afvragen hoe bijzonder dat is. Zo komen we tot de volgende relatie die kan worden opgevat als een vergelijking in de onbekende n, waarbij k gegeven is:

$$k \times d(n) = n \qquad (1)$$

Het is een vergelijking met diverse verrassende eigenschappen, en weer eens heel wat anders dan een vierkantsvergelijking!

Ter oriëntatie kun je in (1) n invullen en dan kijken of $\frac{n}{d(n)}$ geheel is. Het resultaat hiervan ziet u voor $n = 1, 2, \ldots, 100$ ***in tabel 1***.

n	$d(n)$	k	n	$d(n)$	k
1	1	1	40	8	5
2	2	1	56	8	7
8	4	2	60	12	5
9	3	3	72	12	6
12	6	2	80	10	8
18	6	3	84	12	7
24	8	3	88	8	11
36	9	4	96	12	8

tabel 1

De volgende opgave is, na een blik op de tabel, niet al te moeilijk.

Opgave 1
Bepaal een oplossing van (1) als k een willekeurig priemgetal is.

Onze vergelijking is ook oplosbaar voor veel andere getallenrijen. In de volgende opgave zien we twee voorbeelden.

Opgave 2
Bepaal een oplossing van (1) voor $k = p^3$ en voor $k = 2^{p-2}$ (p is een priemgetal groter dan 4).

Er zijn ook diverse k-rijen waarvoor de vergelijking niet oplosbaar is, maar voor zover we weten, zijn dat steeds zeer snel stijgende rijen.

Opgave 3
Laat zien dat $625 \times d(n) = n$ geen oplossing heeft.

Eén van de conclusies van tabel 1 is dat $3 \times d(n) = n$ tenminste drie oplossingen heeft.

Opgave 4
Bepaal nog twee waarden van k waarvoor $k \times d(n) = n$ tenminste drie oplossingen heeft.

Oplossingen kunt u mailen naar *a.gobel@wxs.nl* of per gewone post sturen naar F. Göbel, Schubertlaan 28, 7522 JS Enschede.
Er zijn weer maximaal 20 punten te verdienen met uw oplossing.
De deadline is 31 maart.
Veel plezier!

Oplossing 83-3

Gouden ballen

Het aantal inzendingen van deze opgaven bereikte een record: 24. Het deed mij ook genoegen heel veel positieve reacties te ontvangen.

De inzenders, zoals altijd in volgorde van binnenkomst: Jozef Hanenberg, Monica Woldinga, Jan Verbakel, Wobien Doyer, Wim van den Camp, Kees Verhoeven, Bert Boon, Hans Linders, Gé Groenewegen, Herm Jan Brascamp, C.M. van der Straaten, Floor van Lamoen, Ton Kool, R.A. Kortram, Harm Bakker, Henk van Weers, Pieter Kop Jansen, Gerhard Riphagen, Lieke de Rooij, Niels Wensink, Hub Cilissen, Hans Klein, Leo H. van den Raadt, Ruud Stolwijk. Hartelijk welkom aan alle nieuwe inzenders.

Opgave 1 is door iedereen goed opgelost. De gevraagde splitsing is:
{1, 2, 4, 8, 9, 12} en {3, 5, 6, 7, 10, 11}

Opgave 2. De som van de kwadraten van 1, …, n is gelijk aan $\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.
Een nodige voorwaarde voor een splitsing in tweeën is dus dat dit getal even is, ofwel $n = 0$ of $n = 3$ modulo 4. Verder moet n minstens 7 zijn.
Voor $n = 7, 8, 11, 12$ zijn splitsingen eenvoudig aan te geven. Bijvoorbeeld voor $n = 11$:
{1, 3, 4, 5, 9, 11} en {2, 6, 7, 8, 10}
De getallen van k tot en met $k + 7$ kunnen als volgt in twee groepen worden verdeeld zó dat de kwadraten van die groepen gelijke som hebben:
$\{k, k+3, k+5, k+6\}$ en $\{k+1, k+2, k+4, k+7\}$
Aangezien dit voor alle k geldt, is de verzameling n-waarden nu bepaald.

Ook *opgave 3* is door alle inzenders goed opgelost. De bedoelde splitsing ligt, evenals bij opgave 1, eenduidig vast:
{1, 3, 5, 6, 9, 11}, {2, 10, 13}, {4, 7, 8, 12}

Opgave 4. Een nodige voorwaarde is: $n = 0, 4$ of 8 modulo 9. Voor de drie verzamelingen $\{a, a+3\}$, $\{a+1, a+4\}$, $\{a+2, a+3\}$ is de som van de kwadraten steeds van de vorm $2a^2 + 10a + r$ met r respectievelijk gelijk aan 25, 13, 17.
Het volgende zestal $b, \ldots, b+5$ met $b = a + 6$ verdelen we op dezelfde manier in drie paren, maar de volgorde van de paren kiezen we zó dat de constante term respectievelijk 17, 25 en 13 is. En bij het daaropvolgende zestal wordt de constante term respectievelijk 13, 17 en 25. Het is nu een koud kunstje om van deze 9 paren drie groepen van ieder 6 getallen te maken zó dat de kwadraatsom in ieder groepje gelijk is. Dus een oplossing voor $n = 13$ geeft ook een oplossing voor $13 + 18k$.

Er werden deze keer heel wat extra resultaten ingestuurd. Ik geef enkele voorbeelden.
Veel oplossers bepaalden *alle* oneindige rijen bij opgave 4. Monica Woldinga en Wobien Doyer gaven ook een voldoende voorwaarde voor p opdat de kwadraten van 1 tot en met n niet in 2 of 3, maar in p groepen zijn te splitsen.
Hogere machten gaan in principe op dezelfde manier als de kwadraten, maar een beginpunt is wat lastiger. Enkele inzenders schakelden hiervoor de computer in. Wobien Doyer had de ingeving om bij 0 te beginnen.
De computer werd door sommigen ook gebruikt om aantallen oplossingen te bepalen. Tenslotte wil ik Harm Bakker noemen die van zijn inzending bijna een spannend verhaal wist te maken!

Ladderstand
De top van de ladder ziet er nu als volgt uit:

H.J. Brascamp 492
J. Meerhof 395
L. de Rooij 373
G. Riphagen 321
L. van den Raadt 241
W. Doyer 216
H. Klein 215
N. Wensink 208
T. Kool 135
K. Verhoeven 109

De tussentijdse ladderprijs gaat dus naar Herm Jan Brascamp en de speciale extra prijs naar Wobien Doyer voor de complete analyse van de diverse gouden-ballenproblemen.
Hartelijk gefeliciteerd allebei!

SERVICEPAGINA

Centrale examens 2008, 1e tijdvak
Regionale examenbesprekingen

	CE	regionale bespreking
vwo A1/A12	ma.19 mei 13:30-16:30u	wo. 21 mei 15:30-18:00u
havo B1/B12	di. 20 mei 13:30-16:30u	do. 22 mei 15:30-18:00u
vmbo TGK	do. 22 mei 13:30-15:30u	ma. 26 mei 15:00-18:00u
havo A12	wo. 28 mei 13:30-16:30u	vr. 30 mei 16:00-18:00u
vwo B1/B12	wo. 28 mei 13:30-16:30u	vr. 30 mei 15:30-18:00u

Voor overige internet-adressen zie *www.wiskundepersdienst.nl/agenda.php*

Voor Wiskundeonderwijs Webwijzer zie *www.wiskundeonderwijs.nl*

Publicaties van de Nederlande Vereniging van Wiskundeleraren



Zebraboekjes

1. Kattenaids en Statistiek
2. Perspectief, hoe moet je dat zien?
3. Schatten, hoe doe je dat?
4. De Gulden Snede
5. Poisson, de Pruisen en de Lotto
6. Pi
7. De laatste stelling van Fermat
8. Verkiezingen, een web van paradoxen
9. De Veelzijdigheid van Bollen
10. Fractals
11. Schuiven met auto's, munten en bollen
12. Spelen met gehelen
13. Wiskunde in de Islam
14. Grafen in de praktijk
15. De juiste toon
16. Chaos en orde
17. Christiaan Huygens
18. Zeepvliezen
19. Nullen en Enen
20. Babylonische Wiskunde
21. Geschiedenis van de niet-Euclidische meetkunde
22. Spelen en Delen
23. Experimenteren met kansen
24. Gravitatie
25. Blik op Oneindig
26. Een Koele Blik op Waarheid

Zie verder ook *www.nvvw.nl/zebrareeks.html* en/of *www.epsilon-uitgaven.nl*

Nomenclatuurrapport Tweede fase havo/vwo
Dit rapport en oude nummers van Euclides (voor zover voorradig) kunnen besteld worden bij de ledenadministratie (zie Colofon).

Wisforta – wiskunde, formules en tabellen
Formule- en tabellenboekje met formulekaarten havo en vwo, de tabellen van de binomiale en de normale verdeling, en toevalsgetallen.

Honderd jaar wiskundeonderwijs, lustrumboek van de NVvW
Het boek is met een bestelformulier te bestellen op de website van de NVvW: *www.nvvw.nl/lustrumboek2.html*
Voor overige NVvW-publicaties zie de website: *www.nvvw.nl/Publicaties2.html*

Kalender

In de kalender kunnen alle voor wiskundedocenten toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen. Relevante data graag zo vroeg mogelijk doorgeven aan de hoofdredacteur, het liefst via e-mail (*redactie-euclides@nvvw.nl*). Hieronder vindt u de verschijningsdata van Euclides in de lopende jaargang. Achter de verschijningsdatum is de deadline vermeld voor het inzenden van mededelingen en van de *eind*versies van geaccepteerde bijdragen; zie daarvoor echter ook *www.nvvw.nl/euclricht.html.*

nr.	verschijnt	deadline
6	22 april	4 maart
7	3 juni	8 april
8	1 juli	15 mei

woensdag 12 maart, Utrecht
Conferentie: Voortbestaan van de wiskunde in het HBO
Organisatie HBO-werkgroep van de NVvW

vr. 14 en za. 15 maart, Garderen
Finale Wiskunde A-lympiade
Organisatie FIsme

dinsdag 18 maart, Groningen
17e Johann Bernoulli-lezing
Organisatie RU Groningen

do. 27 en vr. 28 maart, Noordwijkerhout
Nationale Rekendagen
Organisatie FIsme

woensdag 9 april, Amsterdam
Mastercourse: Laat de Spelen beginnen! Olympische wiskunde
Organisatie UvA

vrijdag 11 april, op de scholen
Wiskunde Kangoeroe
Organisatie Stichting Wiskunde Kangoeroe

woensdag 16 april, op de scholen
De Grote Rekendag
Organisatie FIsme

zaterdag 17 mei, Utrecht
HKRWO-Symposium XIV: Doen of denken?
Organisatie HKRWO

vrijdag 20 juni, Utrecht
Bèta onder de Dom, workshops voor bètadocenten
Organisatie Faculteit Bètawetenschappen, Universiteit Utrecht

zo. 13 t/m vr. 18 juli, RAI, Amsterdam
Fifth European Congress of Mathematics
Organisatie VU, CWI en UvA

do. 24 t/m di. 29 juli, Leeuwarden
Bridges Leeuwarden (11th Bridges Conference): Mathematics, Music, Art, Architecture, Culture
Organisatie The Bridges Organisation (*www.bridgesmathart.org*)